UEBER EINE SINGULAERE INTEGRALGLEICHUNG 1. ART MIT ZUSATZKERN

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes
vorgelegt von

Heinrich N. Müller

aus Furschweiler

Saarbrücken, 1964

Tag der mündlichen Prüfung: 12. November 1964

Der Dekan: Professor Dr. F. Seel

Berichterstatter: Professor Dr.-Ing. J. Dörr

Professor Dr. H. Söhngen

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

I. Die zugeordnete Integralgleichung 1. Art 7

II. Die zugeordnete Integralgleichung 2. Art 18

III. Das ungestörte Problem 29

IV. Ausgeartete Zusatzkerne mit $D(\lambda) \neq 0$ 42

V. Ausgeartete Zusatzkerne mit $D(\lambda) = 0$ 50

VI. Der Spezialfall $a(x) = \text{const.}$ 61

VII. Allgemeiner Zusatzkern mit Fehlerabschätzungen 74

Literaturverzeichnis 90

Einleitung

Ausgangspunkt dieser Untersuchung war die Arbeit [1] von M. Eichler, in der die Integralgleichung 1. Art

$$0.01 \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} L_n(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi = f(x)$$

behandelt wird. Der Kern $L_n(x,\xi)$ hat hierbei folgende spezielle Struktur:

$$\begin{aligned} L_n(x,\xi) = {} & \frac{1}{x-\xi} + c_0(x)\left[\gamma_0(\xi) + I_0(x-\xi)\right] \\ & + c_1(x)\left[\frac{1}{1!}\,x\gamma_0(\xi) + \gamma_1(\xi) + I_1(x-\xi)\right] \\ & + \ldots \\ & \vdots \\ & + c_n(x)\left[\frac{1}{n!}\,x^n\gamma_0(\xi) + \frac{1}{(n-1)!}\,x^{n-1}\gamma_1(\xi) + \ldots\right. \\ & \left. \ldots + \gamma_n(\xi) + I_n(x-\xi)\right] \end{aligned} \qquad 0.02$$

mit $I_0(x) = \ln|x|$ und $I_n(x) = \int_0^x I_{n-1}(x)dx$, $n = 1, 2, \ldots$

Die auftretenden Funktionen werden alle im betreffenden Intervall als stetig differenzierbar vorausgesetzt. Integrale mit singulärem Integranden sind hier und im folgenden stets im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu nehmen.

M. Eichler transformiert o.o1 auf die Form

$$o.o3 \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\xi)}{x-\xi}\,d\xi = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\,g(x) = g^{(n+1)}(x)$$

und bestimmt g(x) als Lösung der Differentialgleichung

$$o.o4 \qquad g^{(n+1)}(x) + c_o(x)g^{(n)}(x) + \ldots + c_n(x)g(x) = f(x)$$

mit $n > o$ unter Zuhilfenahme einer Greenschen Funktion G(x,t). Als allgemeine Lösung von o.o3 erhält man dann nach H. Söhngen |6|

$$\varphi(\xi) = \frac{\varphi_o}{\pi(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x^2}{1-\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{g^{(n+1)}(x)}{\xi-x}\,dx$$

mit einer beliebigen Konstanten φ_o.
Das Hauptproblem für eine numerische Auswertung obigen Konstruktionsverfahrens bildet die explizite Bestimmung der Greenschen Funktion G(x,t):

$$G(x,t) = \sum_{\nu=o}^{n} h_\nu(x)r_\nu(t) + \begin{cases} 0 & \text{für } x < t \\ \sum_{\nu=o}^{n} h_\nu(x)s_\nu(t) & \text{für } x > t \end{cases}$$

Diese kann - abgesehen von Spezialfällen - überhaupt nicht explizit angegeben werden, da die Kenntnis eines Fundamentalsystems von Lösungen $h_\nu(x)$ der Differentialgleichung o.o4 vorausgesetzt wird. Betrachtet man andrerseits ein Fundamentalsystem von Lösungen als gegeben, so müssen die Funktionen $s_\nu(t)$ und $r_\nu(t)$ aus einem inhomogenen linearen Gleichungs-

system bestimmt werden, was ebenfalls nur in Spezialfällen explizit durchführbar ist.

M. Eichler untersucht insbesondere den Fall spezieller Differenzkerne, die auf eine Differentialgleichung o.o4 mit konstanten Koeffizienten führen. Aber auch hier bleibt die explizite Bestimmung der $r_\nu(t)$ problematisch, und damit die Berechnung des lösenden Kernes. Interessiert man sich jedoch nur für eine numerische Bestimmung der Funktion $\varphi(\xi)$, so genügt es, an Stelle der $r_\nu(t)$ die Konstanten

$$r_\nu[f] = \int_{-1}^{1} r_\nu(t) f(t) dt$$

aus einem inhomogenen linearen Gleichungssystem zu berechnen.

Auf den wichtigen Fragenkomplex, der entsteht, wenn man einen allgemeinen Kern mit gleichem singulären Verhalten wie in o.o2 durch Kerne $L_n(x,\xi)$ approximiert, ist M. Eichler nicht eingegangen. Man beachte, daß für $n \longrightarrow \infty$ die Ordnung der Differentialgleichung o.o4 ebenfalls gegen Unendlich geht, was natürlich die numerische Behandlung wesentlich erschwert. Vom praktischen wie vom theoretischen Standpunkt aus ist es wichtig, zu wissen, ob die Lösung der Integralgleichung o.o1 mit dem speziellen Kern $L_n(x,\xi)$ aus o.o2 gegen die Lösung von o.o1 mit allgemeinem Kern konvergiert, wenn $L_n(x,\xi)$ für $n \longrightarrow \infty$ gegen den allgemeinen Kern strebt. Ferner dürfte eine entsprechende Fehlerabschätzung von größtem Nutzen sein.

In dieser Arbeit wird folgende allgemeinere singuläre Integralgleichung 1.Art untersucht:

$$o.o5 \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} L(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi = f(x)$$

mit dem singulären Kern

$$o.o6 \qquad L(x,\xi) = \frac{1}{x-\xi} + a(x)\ln|x-\xi| + g(x,\xi)$$

$g(x,\xi)$ ist dabei ein beliebiger, über $-1 \leqslant x,\xi \leqslant 1$ zweidimensional hölderstetiger Kern. Hierin ist der Eichlersche Fall enthalten. Von den Funktionen $a(x)$ und $f(x)$ wird nicht einmal überall lokale Hölderstetigkeit[+)] vorausgesetzt; es dürfen durchaus endlich viele Unstetigkeiten und Unendlichkeitsstellen auftreten. Die einzelnen Voraussetzungen werden im Laufe der Untersuchung angegeben.

Gesucht werden für obige Integralgleichung o.o5 eine Resolvente $R(\xi,u)$ und eine Lösung des homogenen Problems $h(\xi)$, so daß sich die allgemeine Lösung in folgender Weise schreiben läßt:

$$o.o7 \qquad \varphi(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} R(\xi,u)f(u)du + C\,h(\xi)$$

wobei C eine beliebige Konstante ist. Als Lösung $\varphi(\xi)$ von o.o5 wird nur eine den Voraussetzungen entsprechende Funktionenklasse zugelassen.

[+)] Dieser Begriff wird später definiert.

In Kap. I-II wird der Integralgleichung o.o5 eine Integralgleichung 2.Art mit nicht quadratisch integrablem Kern zugeordnet. Hierbei wird die singuläre Integralgleichung

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|x-\xi|\varphi(\xi)d\xi = f(x)$$

unter schwächeren Voraussetzungen als in der Literatur üblich benötigt und behandelt. Ferner werden zwei Unstimmigkeiten in der Eichlerschen Arbeit |1| beseitigt. Das ungestörte Problem, d.h. $g(x,\xi) \equiv o$ in $-1\leq x, \xi \leq 1$, wird in Kap. III exakt gelöst. Hierauf ist M. Eichler in |1| nicht eingegangen. Weiterhin werden in diesem Kapitel wichtige Spezialfälle als Beispiele ausführlich behandelt.

In Kap. IV-V wird die Integralgleichung o.o5 mit ausgearteten Störkernen $g(x,\xi)$ untersucht. Auch hier kann die Lösung im Falle der Existenz explizit angegeben werden. Es muß hier unterschieden werden, ob die charakteristische Determinante $D(\lambda)$ von Null verschieden oder gleich Null ist. Im letzteren Fall kann die Lösungsfunktion mehrparametrig werden. Es braucht aber unter Umständen gar keine Lösung zu existieren. Hierfür wird ein notwendiges und hinreichendes Kriterium angegeben. Auch hier werden einige erläuternde Beispiele erörtert. In Kap. VI wird der wichtige Sonderfall $a(x) = \text{const.}$ ausführlich behandelt.

Das abschließende Kap. VII untersucht die Integralgleichung o.o5 mit allgemeinem Störkern $g(x,\xi)$. Es wird ein hinreichendes Kriterium dafür gegeben, daß die Integralgleichung o.o5 eine einparametrige Lösung der Art o.o7 hat. Diese ergibt sich als Grenzwert der einparametrigen Lösungen von o.o5 mit ausgearteten Störkernen, wenn diese nur gleichmäßig gegen den allgemeinen Kern

$g(x,\xi)$ konvergieren. Ferner wird eine entsprechende Fehlerabschätzung für die Differenz der Lösung von o.o5 und der Lösung angegeben, welche die Integralgleichung o.o5 mit ausgeartetem Störkern erfüllt.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß Integralgleichungen 1. Art vom Typus o.o5 in der Tragflügeltheorie oder bei gewissen Randwertproblemen für elliptische partielle Differentialgleichungen in zwei Variablen vorkommen.

An dieser Stelle danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Dörr für die fruchtbare Themenstellung und für zahlreiche anregende Hinweise. Zu danken habe ich aber auch für das mir entgegengebrachte Vertrauen und die wohlwollende Förderung, die er mir seit Jahren angedeihen läßt.

Kap. I: Die zugeordnete Integralgleichung 1. Art

Um die Voraussetzungen über die Vorgaben $a(x)$, $g(x,\xi)$ und $f(x)$ leichter formulieren zu können, sind einige Definitionen notwendig.

Die Funktion $y(x)$ sei über dem offenen, halboffenen oder abgeschlossenen Intervall $\langle a,b\rangle$ definiert.

Def. 1: Der Punkt $x_0 \in \langle a,b\rangle$ heißt ein H-Punkt von $y(x)$, wenn es ein den Punkt x_0 echt umfassendes abgeschlossenes Intervall $U_{x_0} \subseteq \langle a,b\rangle$ gibt, in dem die Funktion $y(x)$ gleichmäßig einer Hölderbedingung

$$1.o1 \qquad |y(x_2) - y(x_1)| \leq M|x_2-x_1|^{\mu}, \quad o < \mu < 1,$$

mit dem Hölderindex μ und der positiven Konstanten M genügt. Die Funktion $y(x)$ heißt dann im Punkte x_0 lokal hölderstetig.

Die Konstanten M und μ können von Intervall zu Intervall variieren. Nach dieser Definition sind die Randpunkte von $\langle a,b\rangle$ nie H-Punkte.

Def. 2: Die Funktion $y(x)$ heißt über $\langle a,b\rangle$ hölderstetig, wenn $y(x)$ über $\langle a,b\rangle$ gleichmäßig einer Hölderbedingung 1.o1 genügt.

Hieraus folgt unmittelbar, daß bei einer über $\langle a,b\rangle$ hölderstetigen Funktion jeder Punkt $x \in (a,b)$ ein H-Punkt ist. Die Umkehrung gilt nicht. Hängt $y(x,\xi)$ von

zwei Variablen ab, $x \in \langle a,b\rangle$ und $\xi \in \langle c,d\rangle$, dann läßt sich der Begriff der Hölderstetigkeit folgendermaßen verallgemeinern:

Def. 3: Die Funktion $y(x,\xi)$ heißt zweidimensional hölderstetig über dem Defintionsbereich, wenn $y(x,\xi)$ dort gleichmäßig folgender Hölderbedingung genügt:

$$|y(x_2,\xi_2) - y(x_1,\xi_1)| \leq M|x_2-x_1|^{\mu} + N|\xi_2-\xi_1|^{\nu}$$

$$0<\mu,\nu<1,$$

mit positiven Konstanten M und N.

Unmittelbar aus der Definition 3 ergibt sich, daß $y(x,\xi)$ bei zweidimensionaler Hölderstetigkeit in jeder einzelnen Variablen gleichmäßig hölderstetig bezüglich der anderen Variablen ist. Die Umkehrung ist auch richtig; denn es ist:

$$|y(x_2,\xi_2) - y(x_1,\xi_1)| \leq |y(x_2,\xi_2) - y(x_1,\xi_2)| + |y(x_1,\xi_2) - y(x_1,\xi_1)|$$

Für $a(x) \equiv 0$ und $g(x,\xi) \equiv 0$ über dem jeweiligen Definitonsbereich erhält man aus o.o5 die Söhngensche Integralgleichung. Daher liegt es nahe, über die Inhomogenität $f(x)$ dieselben Voraussetzungen wie dort |6| zu treffen.

Def. 4: Die Funktion $y(x)$, definiert über $(-1,1)$, gehört zur Klasse L_A, wenn gilt:

1. Es sei A eine endliche Menge von Ausnahmestellen über $[-1,1]$, die zumindestens die beiden Randpunkte enthält. Jeder Punkt $x \notin A$ ist ein H-Punkt der Funktion $y(x)$.
2. Die Funktion $y(x)$ und $y^2(x)\cdot(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ sind über $(-1,1)$ integrierbar.

Ist $A = \{-1,1\}$, so ist $y(x)$ notwendig über $(-1,1)$ stetig. Wegen der Abschätzung

$$|y(x)| \leq \frac{1}{2}\left(y^2(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \right) \quad , \; x \notin A,$$

ist jedes Element $y(x)$ aus L_A über $(-1,1)$ absolut integrabel.

Es werden nun folgende Voraussetzungen für die Ausgangsintegralgleichung o.o5 getroffen:

1. Der Zusatzkern $g(x,\xi)$, auch Störkern genannt, sei über $-1 \leq x,\xi \leq 1$ zweidimensional hölderstetig.
2. Die Funktion $a(x)$ sei aus der Klasse L_{A_1} und $f(x)$ aus der Klasse L_{A_2}.

Diese Voraussetzungen für den Kern $L(x,\xi)$ aus o.o6 werden im allgemeinen nicht von den entsprechenden Voraussetzungen bei H. Schubert in |5| erfaßt.

Es sei $A = A_1 \cup A_2$. Dann lautet die Problemstellung folgendermaßen:
Gesucht ist die Gesamtheit der Funktionen $\varphi(\xi)$ aus der Klasse L_A, die in jedem Punkt $x \notin A$ der Integralgleichung o.o5 genügen.

Vorerst sei angenommen, daß ein $\varphi(\xi)$ aus L_A existiert. Es wird zuerst untersucht, ob der Ausdruck

$$1.o2 \qquad g(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|x-\xi|\varphi(\xi)d\xi$$

in jedem H-Punkt von $\varphi(\xi)$ differenzierbar ist und ob die Differentiation unter dem Integralzeichen vorgenommen werden kann. Es sei

$$f(x,\varepsilon) = \int_{-1}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{1} \ln|x-\xi|\varphi(\xi)d\xi$$

mit hinreichend kleinem $\varepsilon > o$.

HS. 1: Um jeden H-Punkt x_o von $\varphi(\xi)$ existiert ein Intervall (a',b'), so daß gilt:

$$\frac{d}{dx}f(x,\varepsilon) = (\varphi(x-\varepsilon) - \varphi(x+\varepsilon))\ln\varepsilon + \int_{-1}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{1} \frac{\varphi(\xi)}{x-\xi}d\xi$$

für $x \in (a',b')$,

wenn nur $o < \varepsilon \ll \varepsilon_o$ mit hinreichend kleinem ε_o.

Beweis: Da x_o H-Punkt von $\varphi(\xi)$, existiert ein Stetigkeitsintervall $U_{x_o} = [a,b]$ von $\varphi(\xi)$, so daß kein Element von A in $[a,b]$ liegt. Es sei (a',b') ein beliebiges Teilintervall von $[a,b]$ mit $a < a' < x_o < b' < b$ und $\varepsilon_o < \mathrm{Min}(a'-a,\ b-b')$. $f(x,\varepsilon)$ sei folgendermaßen aufgespalten:

$$f(x,\varepsilon) = \int_{-1}^{a} + \int_{b}^{1} \ln|x-\xi|\varphi(\xi)d\xi + \int_{a}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{b} \ln|x-\xi|\varphi(\xi)d\xi$$

Der zweite Term bereitet für die Differentiation keine Schwierigkeit, und man erhält bekanntlich dafür

$$(\varphi(x-\varepsilon) - \varphi(x+\varepsilon))\ln\varepsilon + \int_{a}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{b} \frac{\varphi(\xi)}{x-\xi}\,d\xi$$

Beim ersten Term ist die Differentiation unter dem Integralzeichen ebenfalls erlaubt, da beim Integral

$$\int_{-1}^{a}\int_{b}^{1} \frac{\varphi(\xi)}{x-\xi}\,d\xi$$

wegen der absoluten Integrabilität von $\varphi(\xi)$ gleichmäßig bezüglich $x \in (a', b')$ in die Ausnahmestellen hineinintegriert werden kann.
Hiermit läßt sich folgender Satz beweisen:

Satz 1: Ist $\varphi(\xi) \in L_A$, so existiert für jeden Punkt $x \notin A$ die Ableitung $g'(x)$, und es gilt:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\int_{-1}^{1} \ln|x-\xi|\varphi(\xi)d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\xi)}{x-\xi}d\xi, \quad x \notin A$$

Beweis: x_o sei H-Punkt von $\varphi(\xi)$. Die Bezeichnungen seien wie in HS.1. Für $x \in (a', b')$ gilt dann nach HS. 1:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d}{dx} f(x,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ (\varphi(x-\varepsilon)-\varphi(x+\varepsilon)) \ln \varepsilon + \int_{-1}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{1} \frac{\varphi(\xi)}{x-\xi} \, d\xi \right\}$$

Beide Grenzwerte auf der rechten Seite existieren bezüglich $x \in (a',b')$ gleichmäßig, wie sich im folgenden zeigt. Für $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ gilt wegen 1.01 :

$$|(\varphi(x-\varepsilon)-\varphi(x+\varepsilon)) \ln \varepsilon| \leq 2^{\mu} M_{x_0} \cdot \varepsilon^{\mu} \ln \varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\left| \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{\varphi(\xi)}{x-\xi} \, d\xi \right| = \left| \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{\varphi(\xi)-\varphi(x)}{x-\xi} \, d\xi \right| \leq 2M_{x_0} \cdot \frac{\varepsilon^{\mu}}{\mu} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Damit hat man folgende beiden Aussagen:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(x,\varepsilon) = \int_{-1}^{1} \ln|x-\xi| \varphi(\xi) \, d\xi$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d}{dx} f(x,\varepsilon) = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\xi)}{x-\xi} \, d\xi \quad \text{gleichmäßig für } x \in (a',b')$$

Hieraus folgt analog wie bei Reihen obige Behauptung, da x_0 beliebiger H-Punkt von $\varphi(\xi)$ ist.

Der Beweisgang entspricht dem Beweis in [3], S. 31; die Voraussetzungen für $\varphi(\xi)$ sind jedoch schwächer.

Ueber das Stetigkeitsverhalten der Ableitung von 1.o2 gibt folgender Satz Auskunft:

Satz 2: Ist $\varphi(\xi) \in L_A$, so ist jeder H-Punkt von $\varphi(\xi)$ auch H-Punkt von

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\xi)}{x-\xi}\, d\xi$$

und zwar mit dem gleichen Hölderindex wie bei $\varphi(\xi)$.

Beweis: x_o sei H-Punkt von $\varphi(\xi)$. Die Bezeichnungen seien wie in HS. 1. Es sei

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\xi)}{x-\xi}\, d\xi = \int_{-1}^{a} + \int_{b}^{1} \frac{\varphi(\xi)}{x-\xi}\, d\xi + \int_{a}^{b} \frac{\varphi(\xi)}{x-\xi}\, d\xi$$

Der 1. Term ist für $x \in (a',b')$ stetig differenzierbar, ist also über (a',b') zu jedem Index $\mu < 1$ hölderstetig. Der zweite Summand genügt nach einem Satz in |6|, S.49, in (a',b') einer Hölderbedingung 1.o1 mit dem gleichen Index wie $\varphi(\xi)$. Damit ist der Beweis gegeben.

Die Elemente von A seien mit $e_j, j = o,1,\ldots,r$, bezeichnet, so daß gilt

$$-1 = e_o < e_1 < \ldots < e_{r-1} < e_r = 1, \quad r \geq 1$$

Ferner sei

$$U_i = (e_i, e_{i+1}), \quad i=o,1,\ldots,r-1$$

Die Ausgangsintegralgleichung o.o5 läßt sich dann mit 1.o2 folgendermaßen schreiben:

$$1.o3 \quad g'(x) + a(x)g(x) = f(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} g(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

$$= r(x), \quad x \in U_i, \quad i=o,1,\ldots, r-1$$

Nach den vorausgehenden beiden Sätzen ist $g(x)$ und $g'(x)$ über jedem U_i stetig, ebenfalls die Inhomogenität $r(x)$. $g(x)$ existiert sogar in den Ausnahmenstellen e_j, $j=o,\ldots, r$, und ist dort ebenfalls stetig. Die Existenz für alle $x \in [-1,1]$ folgt sofort aus der Abschätzung

$$|\ln|x-\xi|\varphi(\xi)| \leq \frac{1}{2}\left\{\frac{(\ln|x-\xi|)^2}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} + \varphi^2(\xi)(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\xi \notin A, \quad x \neq \xi$$

Die Stetigkeit in den Ausnahmestellen ergibt sich durch Abschätzen von

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\left\{\ln|e_j+h_j-\xi| - \ln|e_j-\xi|\right\}d\xi, \quad j=o,\ldots, r,$$

indem man das Integrationsintervall geeignet aufspaltet und die absolute Integrabilität von $\varphi(\xi)$ und obige Abschätzung benutzt. Dabei dürfen die h_j nur in geeigneter Weise variieren.

Betrachtet man andrerseits 1.o3 als eine Differentialgleichung für eine unbekannte, über jedem U_i stetig differenzierbare Funktion $g(x)$, so erhält man bekanntlich folgende Lösungsschar

$$g(x) = \int_{x_o}^{x} e^{A(u)-A(x)} r(u)\,du + C_i e^{-A(x)}, \quad x \in U_i,$$
$$i = 0,1,\ldots, r-1,$$

mit $A(x) = \int_{x_o}^{x} a(v)\,dv$ und beliebigem, aber festen $x_o \in [-1;1]$
Hierbei sind die C_i freie Parameter. Stellt man an $g(x)$ weiterhin die notwendige Forderung der Stetigkeit über $[-1,1]$, so folgt aus obiger Darstellung, daß dies nur für $C_i = C$, $i = 0, \ldots, r-1$, mit einem freien Parameter C erfüllt sein kann. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann fortan x_o gleich -1 gesetzt werden, was sich später bei auftretenden Vertauschungen der Integrationsreihenfolge als sinnvoll erweist. Es sei daher der Integralgleichung 0.05 folgende Integralgleichung zugeordnet

$$1.04 \quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|x-\xi|\varphi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{1} e^{A(u)-A(x)} g(u,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\,du$$
$$= \int_{-1}^{x} e^{A(u)-A(x)} f(u)\,du + C\, e^{-A(x)}, \quad x \in [-1,1],$$

mit dem freien Parameter C. Die Gleichung 1.04 ist in folgendem Sinne mit der Ausgangsintegralgleichung 0.05 äquivalent. Hat 0.05 eine Lösung aus $\varphi(\xi)$ aus L_A, so existiert eindeutig eine Konstante $C = C_o$, so daß $\varphi(\xi)$ auch Lösung von 1.04 mit $C = C_o$ ist. Existiert umgekehrt zu einer Konstanten $C = C_o$ eine Lösung $\varphi(\xi)$ aus L_A für die Integralgleichung 1.04, so folgt unmittelbar aus 1.04 und der Differentialgleichung 1.03, daß $\varphi(\xi)$ für $x \neq A$ auch Lösung der Ausgangsintegralgleichung 0.05 ist. Hat 1.04 zu zwei voneinander verschiedenen C-Werten

je eine Lösung $\varphi(\xi)$ aus L_A, so folgt aus 1.o4 sofort, daß die beiden Lösungsfunktionen nicht miteinander übereinstimmen können. Existiert zu allen C-Werten eine Lösung von 1.o4, so hat dementsprechend die Ausgangsintegralgleichung o.o5 eine einparametrige Lösungsschar.

Nach M. Eichler kann man der Ausgangsintegralgleichung o.o5 auch die Integralgleichung zuordnen, die man durch Differentiation von 1.o4 über jedem U_i erhält. Diese ist jedoch zu o.o5 nicht mehr in obigem Sinne äquivalent. Durch spezielle Wahl des freien Parameters C kann dieser Nachteil behoben werden, was in |1| auf die Festlegung der Nebenbedingung der anfangs erwähnten Greenschen Funktion hinausläuft. Um dieser Schwierigkeit hier aus dem Wege zu gehen, sei 1.o4 weiterhin betrachtet. Wegen der absoluten Integrierbarkeit von $\varphi(\xi)$ läßt sich leicht zeigen, daß in dem Doppelintegral von 1.o4 die Integrationsreihenfolge vertauschbar ist; man erhält so folgende zu o.o5 äquivalente Integralgleichung 1. Art:

$$1.o5 \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\Big(\ln|x-\xi| + G(x,\xi)\Big)\varphi(\xi)d\xi = F_C(x)$$

$$\text{mit} \qquad G(x,\xi) = \int_{-1}^{x} e^{A(u)-A(x)}g(u,\xi)du$$

$$F_C(x) = \int_{-1}^{x} e^{A(u)-A(x)}f(u)du + C\, e^{-A(x)}$$

$$A(x) = \int^{x} a(v)dv, \quad x \in [-1,1]$$

Der Kern dieser o.o5 zugeordneten äquivalenten Integralgleichung 1. Art ist nur noch logarithmisch singulär. Die hier definierten Funktionen $A(x)$, $F_C(x)$ und $G(x,\xi)$ werden im folgenden immer wieder verwandt.

Kap. II: Die zugeordnete Integralgleichung 2. Art

Zur weiteren Behandlung von 1.o5 sei die singuläre Integralgleichung 1. Art

$$2.o1 \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|x-\xi|\,\varphi(\xi)\,d\xi = f(x)$$

betrachtet. Hierfür wird noch folgender Hilfssatz benötigt.

HS. 2: Es gilt folgende Identität

$$Q(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\ln|x-\xi|\,d\xi}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}\,(t-\xi)} = \frac{}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}\begin{cases} -\frac{\pi}{2} + \arcsin t, & t > x \\ \\ \frac{\pi}{2} + \arcsin t, & t < x \end{cases}$$

für $x \neq t$, $-1 < x,t < 1$

Beweis: x sei fest. Die rechte Seite obiger Identität erfüllt die Voraussetzungen des Söhngenschen Satzes in |6|, S.253. Der Beweis ist also gegeben, wenn gezeigt werden kann, daß die Relation

$$\ln|x-\xi| = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}{t-\xi}\,Q(x,t)\,dt + C, \quad x \neq \xi,$$

mit einer bestimmten Konstanten C erfüllt ist, wobei Q(x,t) natürlich durch die rechte Seite obiger Identität zu ersetzen ist. Man findet für $x \neq \xi$ und $-1 < x,\xi < 1$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{x} \frac{dt}{t-\xi} - \frac{1}{2}\int_{x}^{1} \frac{dt}{t-\xi} = \ln|x-\xi| - \frac{1}{2}\left\{\ln(1+\xi) + \ln(1-\xi)\right\}$$

Durch partielle Integration ergibt sich für $-1 < \xi < 1$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\arcsin t}{t-\xi}\,dt = \frac{1}{2}\left\{\ln(1+\xi) + \ln(1-\xi)\right\} + \ln 2$$

wenn man folgende Beziehung beachtet:

2.o2 $$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\ln|t-\xi|}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\,d\xi = -\ln 2, \quad -1 < t < 1$$

Für $C = -\ln 2$ ist obige Relation also erfüllt.

Anmerkung: M. Eichler beweist in |1| auf Seite 511/512, daß $Q(x,t) \equiv o$ ist, was offenbar nicht in Ordnung ist.

Im folgenden Satz wird vorausgesetzt, daß $f'(x)$ aus der Klasse L_A ist. $f(x)$ braucht an den Ausnahmestellen überhaupt nicht definiert zu sein. Die Grenzwerte

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow o} f(e_k \pm \varepsilon) = f(e_k \pm o)$$

$$k = o, \ldots, r$$

existieren jedoch. Für die Randpunkte ist natürlich nur das Plus- bzw. Minuszeichen zugelassen. Es gilt z.B. für $x \in U_{k+1}$, $k = o, \ldots, r-1$,

$$\int_{e_k}^{x} f'(x)dx = \lim_{\varepsilon \longrightarrow o} \int_{e_k+\varepsilon}^{x} f'(x)dx = \lim_{\varepsilon \to o}\left\{f(x)-f(e_k+\varepsilon)\right\}$$

$$= f(x) - \lim_{\varepsilon \longrightarrow o} f(e_k+\varepsilon) = f(x) - f(e_k+o)$$

Ist $f(e_k+o) = f(e_k-o)$, $k=1, \ldots, r-1$, so ist $f(x)$ über $[-1,1]$ zumindestens hebbar stetig. In einem solchen Fall sei im folgenden, sofern dies nötig, $f(e_k)$ durch $\lim_{\varepsilon \to o} f(e_k+\varepsilon)$ definiert, so daß $f(x)$ über $[-1,1]$ stetig ist.

Satz 3: Die Funktion $f(x)$ sei für $x \notin A$ differenzierbar, und $f'(x)$ sei aus L_A mit $A = \{e_k, k=o,1,\ldots, r\}$. Die Integralgleichung 2.o1 hat dann und nur dann eine Lösung aus L_A, wenn $f(x)$ in den Ausnahmestellen e_k, $k=1, \ldots, r-1$, zumindestens hebbar stetig ist.

Ist dies der Fall, so ist die Funktion

$$2.o3 \quad \varphi(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x^2}{1-\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{f'(x)}{\xi-x}dx - \frac{1}{\pi \ln 2(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$$

$$\xi \notin A$$

die einzige Funktion aus L_A, die für jedes $x \in [-1,1]$ die Integralgleichung 2.o1 erfüllt.

Ueberdies genügt dann $\varphi(\xi)$ in einer vollen Umgebung eines jeden H-Punktes von $f'(x)$ einer Hölderbedingung o.o1 mit demjenigen Index, der an dieser Stelle zu $f'(x)$ gehört.

Beweis: Es sei zunächst angenommen, es existiere eine Lösung $\varphi(\xi)$ aus L_A für die Integralgleichung 2.o1. Nach Kap. I ist die linke Seite von 2.o1 über $[-1,1]$ stetig. Hieraus folgt unmittelbar, daß $f(x)$ in den Ausnahmestellen notwendig zumindestens hebbar stetig sein muß, ohne daß vorausgesetzt zu werden braucht, daß die Integralgleichung 2.o1 auch in den Ausnahmestellen erfüllt ist.

Es sei jetzt $f(x)$ über $[-1,1]$ stetig. Durch Differentiation von 2.o1 für $x \notin A$ erhält man nach Satz 1:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\xi)}{x-\xi}\,d\xi = f'(x), \qquad x \notin A$$

Nach |6| ist dann $\varphi(\xi)$ notwendig in folgender Funktionenschar enthalten

$$\frac{C}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x^2}{1-\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{f'(x)}{\xi-x}\,dx, \quad \xi \notin A$$

mit dem freien Parameter C.

Geht man mit diesem Ausdruck in die Integralgleichung 2.o1 ein, so findet man unter Verwendung der Relation 2.o2 folgende Bestimmungsgleichung für die Konstante C:

$$-C\ \ln 2 = f(x) + \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\ln|x-\xi|}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi-u}\,f'(u)\,du\,d\xi$$

Nach erlaubter Vertauschung der Integrationsreihenfolge erhält man hieraus nach HS. 2:

$$-C\ \ln 2 = f(x) + \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} f'(u)du - \frac{1}{2}\int_{x}^{1} f'(u)du$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f'(u)\ \arcsin u\ du, \quad x \in [-1,1]$$

Hieraus folgt

$$C = -\frac{1}{\pi\ \ln 2}\int_{-1}^{1}\frac{f(u)}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}\,du$$

Der letzte Teil des Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem Söhngenschen Satz in |6|.

Die Integralgleichung 2.01 hat also nach diesem Satz 3 schon für einfache Treppenfunktionen als Inhomogenitäten keine Lösung aus L_A. Bei W. Schmeidler |4|, S.56-58. ist 2.01 offenbar nicht richtig behandelt. Er setzt bei der Herleitung von 2.03 voraus, daß die Lösung $\varphi(\xi)$ quadratisch integrabel im Sinne von |4| ist, was nach 2.03 im allgemeinen nicht der Fall ist. Ferner verlangt er von der Ableitung f'(x) ebenfalls nur quadratische Integrabilität, was offenbar zu wenig ist.

Mit Hilfe des obigen Satzes läßt sich leicht ein Irrtum berichtigen, der M. Eichler in |1| bei der Festlegung der Nebenbedingungen für die in der Einleitung erwähnte Greensche Funktion G(x,t) unterlaufen ist. Es soll das Integral

$$E(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|x-\xi|\,\psi_\nu(\xi,t)\,d\xi, \quad -1 < x,t < 1,\ x \neq t$$

mit

$$\psi_\nu(\xi,t) = \frac{1}{\pi}\int_{t}^{1} \left(\frac{1-x^2}{1-\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{h_\nu^{(n+1)}(x)}{x-\xi}\,dx$$

ausgewertet werden, wobei die $h_\nu(x)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung o.04 bedeuten. Es sei

$$f_\nu(x,t) = \begin{cases} h_\nu^{(n)}(x) & \text{für } x > t \\ h_\nu^{(n)}(t) & \text{für } x < t \end{cases}$$

Dann läßt sich $\phi_\nu(\xi,t)$ folgendermaßen schreiben:

$$\phi_\nu(\xi,t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x^2}{1-\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\xi-x}\frac{\partial}{\partial x}f_\nu(x,t)dx$$

Um obigen Satz anwenden zu können, mußte $h_\nu^{(n)}(x)$ für $x < t$ so fortgesetzt werden, daß $f_\nu(x,t)$ an der Stelle t hebbar stetig ist, was M. Eichler nicht beachtet hat. Verlangt man von $h_\nu^{(n+1)}(x)$ über $[-1,1]$ noch zusätzlich Hölderstetigkeit, so ergibt sich nach 2.o1 und 2.o3:

$$E(x,t) = \frac{1}{\pi^2 \ln 2}\int_{-1}^{1}\frac{\ln|x-\xi|}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}d\xi\int_{-1}^{1}\frac{f_\nu(u,t)}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}du + f_\nu(x,t)$$

Mit der Definition

$$h_\nu(x,t) = \begin{cases} h_\nu(x) & x > t \\ \text{für} & \\ 0 & x < t \end{cases}$$

und HS. 2 erhält man schließlich unter Anwendung von 2.o2:

$$E(x,t) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}h_\nu(x,t) - \frac{1}{\pi}\int_{t}^{1}\frac{h_\nu^{(n)}(u)}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}du - h_\nu^{(n)}(t)\cdot Q(x,t)$$

Bei M. Eichler fehlt der Term $Q(x,t)h_\nu^{(n)}(t)$. Nun sollte man annehmen, daß die Nebenbedingungen für die Greensche Funktion G(x,t) sich ebenfalls als falsch erweisen. Dies ist aber nicht der Fall; denn wegen der Beziehung

$$\sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(n)}(t)s_\nu(t) = 1$$

wird obiger Fehler durch den Fehler bei der Auswertung von $Q(x,t)$ in der maßgebenden Relation (33) in |1| gerade kompensiert, so daß die Nebenbedingungen richtig bleiben.

Es sei jetzt wieder die o.o5 zugeordnete Integralgleichung 1. Art 1.o5 betrachtet. Sie läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|x-\xi|\varphi(\xi)d\xi = R_C(x), \quad x \in [-1,1],$$

mit

$$R_C(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} G(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi + F_C(x)$$

Um auf diese Integralgleichung die Auflösungsformel 2.o3 anwenden zu können, wird im folgenden gezeigt, daß $R_C'(x)$ zur Klasse L_A mit $A = A_1 \cup A_2$ gehört, wo A_1 bzw. A_2 die Menge der Ausnahmestellen von $a(x)$ bzw. $f(x)$ bedeutet. Es ist

$$R_C'(x) = f(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} g(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

$$-a(x)e^{-A(x)}\left\{C + \int_{-1}^{x} e^{A(u)}\left(f(u) - \int_{-1}^{1} g(u,\xi)\varphi(\xi)d\xi\right)du\right\}$$

$$x \notin A$$

Man beachte, daß das Produkt zweier hölderstetiger Funktionen wieder hölderstetig ist; das gleiche gilt für die Summe bzw. die Differenz zweier hölderstetiger Funktionen. Daher folgt unmittelbar aus obiger Darstellung für $R_C'(x)$, daß jeder Punkt $x \notin A$ ein H-Punkt von $R_C'(x)$ ist. Die Integrabilität von $R_C'(x)$ und $(R_C'(x))^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ über $(-1,1)$ ergibt sich ebenfalls sofort,

wenn man die Zugehörigkeit von $f(x)$ und $a(x)$ zur Klasse L_A beachtet. Also ist auch $R'_C(x)$ aus der Klasse L_A.

Alle diese Ueberlegungen sind natürlich nur für solche Werte des freien Parameters C sinnvoll, zu denen eine Lösung $\varphi(\xi)$ von o.o5 bzw. 1.o5 existiert. Die Inhomogenität $R_C(x)$ ist über $[-1,1]$ stetig. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes 3 erfüllt, und man erhält nach der Auflösungsformel 2.o3 folgende Gleichung:

$$\varphi(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x^2}{1-\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{R'_C(x)}{\xi-x}\,dx - \frac{1}{\pi\,\ln 2(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\int_{-1}^{1}\frac{R_C(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx, \qquad \xi \notin A$$

Ersetzt man $R_C(x)$, so ergibt sich:

$$\varphi(\xi) - \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\left(\frac{1-x^2}{1-\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{G_x(x,z)}{\xi-x} + \frac{1}{\ln 2(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{G(x,z)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}\varphi(z)\,dz\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left\{\left(\frac{1-x^2}{1-\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{F'_C(x)}{\xi-x} + \frac{1}{\ln 2(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{F_C(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}dx, \qquad \xi \notin A$$

Hierbei ist $G_x(x,z) = \frac{\partial}{\partial x}\,G(x,z)$ gesetzt. Die Integrationsreihenfolge kann im auftretenden Doppelintegral vertauscht werden. Wegen der absoluten Integrabilität von $\varphi(\xi)$ bereitet der zweite Summand hierfür keine Schwierigkeit. Die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge für den ersten Term des Integranden wird im folgenden Hilfssatz 3 bewiesen. Man erhält dann aus obiger Gleichung die folgende Integralgleichung 2. Art, wenn man noch den Störkern $g(x,\xi)$ durch $\lambda g(x,\xi)$ mit dem freien Parameter λ ersetzt:

$$2.04 \qquad \varphi(\xi) - \frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1} k(\xi,z)\varphi(z)dz = d_C(\xi), \quad \xi \notin A$$

Hierbei bedeutet:

$$k(\xi,z) = \frac{1}{\pi(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi-x}G_x(x,z) + \frac{G(x,z)}{\ln 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}dx$$

$$d_C(\xi) = -\frac{1}{\pi(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi-x}F_C'(x) + \frac{F_C(x)}{\ln 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}dx$$

Unter den betrachteten Voraussetzungen ist diese Integralgleichung 2. Art völlig äquivalent mit der Ausgangsintegralgleichung 1. Art o.o5, wenn nur Lösungsfunktionen aus der Klasse L_A in Betracht gezogen werden. Im allgemeinen ist der Kern $k(\xi,z)$ wegen des Faktors $(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}$ nicht quadratisch integrabel. Durch die Substitution $Y(\xi)=(1-\xi^2)^{\frac{1}{4}}.\varphi(\xi)$ kann jedoch 2.o4 in eine Fredholmsche Integralgleichung 2. Art mit quadratisch integrablem Kern und quadratisch integrabler Inhomogenität überführt werden. Die quadratische Integrabilität der Lösung dieser 2.o4 zugeordneten Integralgleichung ist gleichbedeutend mit der Integrabilität von $(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}\,\varphi^2(\xi)$, wobei $\varphi(\xi)$ Lösung von 2.o4 ist.

Es fehlt noch folgender Hilfssatz:

HS. 3: Unter den betrachteten Voraussetzungen gilt für $\xi \notin A$:

$$2.05 \qquad \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{r(x,z)}{\xi-x}\varphi(z)dz\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{r(x,z)}{\xi-x}\varphi(z)dx\,dz$$

mit $$r(x,z) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\, G_x(x,z)$$

Beweis: Die Funktion $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ ist über $[-1,1]$ hölderstetig. Hiermit folgt aus der expliziten Darstellung von $G_x(x,z)$, daß es um jeden Punkt $x \notin A_1$ ein abgeschlossenes Intervall gibt, in dem $r(x,z)$ gleichmäßig bezüglich z einer Hölderbedingung 1.o1 genügt; d.h. die Hölderkonstante M in 1.o1 ist von z unabhängig.

Beide Doppelintegrale in 2.o5 existieren unter den gegebenen Voraussetzungen und lassen sich für $\xi \notin A_1$ folgendermaßen schreiben:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{r(x,z)}{\xi-x}\varphi(z)dz\, dx = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} s(\xi,x,z)\varphi(z)dz\, dx + R(\xi)$$

2.o6

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{r(x,z)}{\xi-x}\varphi(z)dx\, dz = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} s(\xi,x,z)\varphi(z)dx\, dz + R(\xi)$$

mit $$s(\xi,x,z) = \frac{r(x,z)-r(\xi,z)}{\xi-x},\quad \xi \neq x$$

$$R(\xi) = \ln\frac{1+\xi}{1-\xi}\int_{-1}^{1} r(\xi,z)\varphi(z)dz$$

Es reicht also aus zu zeigen, daß die beiden Doppelintegrale auf der rechten Seite von 2.o6 für $\xi \notin A_1$ gleich sind. Aus dem eigentlichen Integrationsgebiet $-1 \leq x,z \leq 1$

sei der Streifen

$$2.07\quad -1 \leqslant z \leqslant 1,\quad \xi-\varepsilon_1 \leqslant x \leqslant \xi+\varepsilon_2,\quad 0<\varepsilon_i \leqslant \varepsilon_0,\quad i=1,2,$$

mit hinreichend kleinem ε_0 herausgenommen. Auf dem so entstehenden Restgebiet ist die Vertauschung der Integrationsreihenfolge ohne weiteres erlaubt. Der Beweis von 2.05 ist erbracht, wenn gezeigt werden kann, daß die beiden Integrale

$$\int_{\xi-\varepsilon_1}^{\xi+\varepsilon_2}\int_{-1}^{1} s(\xi,x,z)\varphi(z)\,dz\,dx,\qquad \int_{-1}^{1}\int_{\xi-\varepsilon_1}^{\xi+\varepsilon_2} s(\xi,x,z)\varphi(z)\,dx\,dz$$

mit $\varepsilon_i \longrightarrow 0$, $i=1,2$, gegen Null konvergieren. Wegen der bezüglich z gleichmäßigen Hölderstetigkeit von $r(x,z)$ in einer Umgebung von $\xi \notin A_1$ gilt für hinreichend kleines ε_0 über dem Streifen 2.07 folgende Abschätzung:

$$|s(\xi,x,z)| \leqslant M|\xi-x|^{\mu-1},\quad \xi \notin A_1,$$

wobei die Konstanten M und μ von ξ abhängen können. Hiermit und mit Hilfe der absoluten Integrabilität von $\varphi(z)$ ergibt sich sofort, daß die beiden Integrale mit $\varepsilon_i \longrightarrow 0$, $i=1,2$, gegen Null streben.

Kap. III: Das ungestörte Problem

Die o.o5 zugeordnete Integralgleichung 2. Art 2.o4 legt es nahe, zuerst den trivialen Fall zu betrachten, daß $k(\xi,z)\equiv o$ über $-1\leqslant\xi,z\leqslant 1$. Aus der Beziehung

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|x-\xi|\,k(\xi,z)\,d\xi = -G(x,z)$$

folgt

$$G(x,z)\equiv o \quad \text{über } -1\leqslant x,z\leqslant 1$$

Hieraus ergibt sich wiederum durch Differentiation von

$$e^{A(x)}G(x,z) = \int_{-1}^{x} e^{A(u)}g(u,z)\,du \equiv o$$

daß $k(\xi,z)\equiv o$ über $-1\leqslant\xi,z\leqslant 1$ äquivalent mit $g(x,z)\equiv o$ über $-1\leqslant x,z\leqslant 1$ ist; es handelt sich also um das ungestörte Problem. In diesem Fall ergibt sich aus 2.o4 folgende einparametrige Lösungsschar aus L_A:

$$3.o1\quad \varphi(\xi) = -\frac{1}{\pi(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi-x}F_C'(x) + \frac{F_C(x)}{\ln 2\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}dx$$

$$\xi \notin A$$

Um die unmittelbare Abhängigkeit der Lösungsfunktion $\varphi(\xi)$ von der Inhomogenität $f(x)$ aus o.o5 zu ersehen, werden in 3.o1 $F_C(x)$ und $F_C'(x)$ durch

$$F_C(x) = e^{-A(x)} \left\{ C + \int_{-1}^{x} e^{A(u)} f(u)\,du \right\}$$

3.o2

$$F_C'(x) = f(x) - a(x)F_C(x), \quad x \notin A$$

ersetzt:

$$\varphi(\xi) = -\frac{1}{\pi(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi-x} \left\{ f(x) - a(x) \int_{-1}^{1} e^{A(u)-A(x)} f(u)\,du \right\} dx$$

3.o3

$$-\frac{1}{\pi \ln 2 (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{x} \frac{e^{A(u)-A(x)}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} f(u)\,du\,dx + C\,h(\xi), \quad \xi \notin A$$

mit der normierten homogenen Lösung

3.o4 $$h(\xi) = \frac{1}{\pi(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-1}^{1} e^{-A(x)} \left\{ \frac{a(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi-x} - \frac{1}{\ln 2 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

Vertauscht man in den beiden auftretenden Doppelintegralen die Reihenfolge der Integrationen nach dem Dirichletschen Prinzip, was im folgenden noch gerechtfertigt wird, so erhält man folgenden Satz:

Satz 4: Die Funktion $a(x)$ bzw. $f(x)$ sei aus der Klasse L_{A_1} bzw. L_{A_2}. Alle Lösungen der singulären Integralgleichung 1. Art

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{x-\xi}+a(x)\ln|x-\xi|\right\}\varphi(\xi)d\xi = f(x),$$

$$x \notin A = A_1 \cup A_2,$$

die zur Klasse L_A gehören, sind gegeben durch

$$3.05 \quad \varphi(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} R(\xi,u)f(u)du + C\,h(\xi), \xi \notin A,$$

mit der Resolvente

$$R(\xi,u) = -\left(\frac{1-u^2}{1-\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\xi-u} + \int_{u}^{1}\frac{e^{A(u)-A(x)}}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{a(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi-x} - \frac{1}{\ln 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}dx$$

wobei C einen freien Parameter bedeutet. Ueberdies genügt dann $\varphi(\xi)$ in einer vollen Umgebung eines jeden Punktes $\xi \notin A$ einer Hölderbedingung 0.01 mit dem Hölderindex $\mathrm{Min}(\lambda,\mu)$, wobei λ bzw. μ den Hölderindex von $a(x)$ bzw. $f(x)$ an der Stelle ξ bedeutet.

Die letzte Aussage ergibt sich unmittelbar aus Satz 3, wenn man die zweite Relation in 3.02 beachtet. Es muß noch die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge in den beiden Doppelintegralen von 3.03 gezeigt werden. Schwierigkeiten bereitet nur das erste Doppelintegral mit dem Cauchyschen Hauptwert.

HS.4: Es sei $G(x)$ bzw. $F(x)$ aus der Klasse L_{A_1} bzw. L_{A_2}. Dann gilt für $\xi \notin A$ mit $A = A_1 \cup A_2$:

$$3.06 \quad \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{x} \frac{F(u)G(x)}{\xi-x}\,du\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{u}^{1} \frac{F(u)G(x)}{\xi-x}\,dx\,du$$

In unserem speziellen Fall ist zu setzen:

$$G(x) = a(x)e^{-A(x)}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(u) = e^{+A(u)}f(u)$$

Beweis: Da die Funktion $\int_{-1}^{x} F(u)du$ über $[-1,1]$ stetig und für $x \notin A_2$ sogar differenzierbar ist, existiert die linke Seite von 3.06 für $\xi \notin A$ und läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{x} \frac{F(u)G(x)}{\xi-x}\,du\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} E(\xi,\varepsilon), \quad \xi \notin A,$$

mit $$E(\xi,\varepsilon) = \int_{-1}^{\xi-\varepsilon} + \int_{\xi+\varepsilon}^{1} \int_{-1}^{x} \frac{F(u)G(x)}{\xi-x}\,du\,dx$$

In $E(\xi,\varepsilon)$ läßt sich die Integrationsreihenfolge vertauschen; $E(\xi,\varepsilon)$ läßt sich dann wie folgt aufspalten:

$$E(\xi,\varepsilon) = \int_{-1}^{\xi-\varepsilon}\int_{u}^{\xi-\varepsilon} \frac{F(u)G(x)}{\xi-x}\,dx\,du + \int_{-1}^{\xi-\varepsilon}\int_{\xi+\varepsilon}^{1} \frac{F(u)G(x)}{\xi-x}\,dx\,du +$$

$$+ \int_{\xi+\varepsilon}^{1} \int_{u}^{1} \frac{F(u)G(x)}{\xi-x}\, dx\, du + r(\xi,\varepsilon), \quad \xi \notin A,$$

$$\text{mit } r(\xi,\varepsilon) = \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \int_{\xi+\varepsilon}^{\xi+\varepsilon_o} \frac{F(u)G(x)}{\xi-x}\, dx\, du + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \int_{\xi+\varepsilon_o}^{1} \frac{F(u)G(x)}{\xi-x}\, dx\, du$$

Es gilt $\lim_{\varepsilon \to o} r(\xi,\varepsilon) = o$. Aus der Darstellung

$$\int_{\xi+\varepsilon}^{\xi+\varepsilon_o} \frac{G(x)}{\xi-x}\, dx = \int_{\xi+\varepsilon}^{\xi+\varepsilon_o} \frac{G(x)-G(\xi)}{\xi-x}\, dx + G(\xi) \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o}$$

folgt für hinreichend kleines, aber festes ε_o, da ξ ein H-Punkt von $G(\xi)$ ist, die Abschätzung

$$\left| \int_{\xi+\varepsilon}^{\xi+\varepsilon_o} \frac{G(x)}{\xi-x} dx \right| \leqslant |G(\xi)| \cdot \left| \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} \right| + \frac{M}{\mu}(\varepsilon_o^{\mu} - \varepsilon^{\mu}), \quad \xi \notin A_1,$$

wobei M die Hölderkonstante und μ der Hölderindex von $G(x)$ an der Stelle ξ ist. Hiermit ergibt sich für $r(\xi,\varepsilon)$ folgende Schranke:

$$|r(\xi,\varepsilon)| \leqslant \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} |F(u)|\, du \left\{ |G(\xi)| \cdot \left| \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} \right| + \frac{M}{\mu} \varepsilon_o^{\mu} + \frac{1}{\varepsilon_o} \int_{\xi+\varepsilon_o}^{1} |G(x)|\, dx \right\}$$

$$\xi \notin A$$

Da $\xi \notin A_2$, existiert um ξ ein Stetigkeitsintervall von $F(u)$. Hiermit ergibt sich aus der Abschätzung obige Behauptung für $r(\xi,\varepsilon)$.

Die linke Seite von 3.06 läßt sich jetzt folgendermaßen schreiben:

3.07 $$\lim E(\xi,\varepsilon) = \lim E^+(\xi,\varepsilon), \quad \xi \notin A, \quad \varepsilon \longrightarrow 0,$$

mit $$E^+(\xi,\varepsilon) = E(\xi,\varepsilon) - r(\xi,\varepsilon).$$

$E^+(\xi,\varepsilon)$ läßt sich wie folgt darstellen:

$$E^+(\xi,\varepsilon) = \int_{-1}^{\xi-\varepsilon} \int_{\xi+\varepsilon}^{1} \int_{u}^{1} \frac{F(u)G(x)}{\xi-x}\,dx\,du - r^+(\xi,\varepsilon), \quad \xi \notin A,$$

mit

$$r^+(\xi,\varepsilon) = \int_{-1}^{\xi-\varepsilon} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \frac{F(u)G(x)}{\xi-x}\,dx\,du$$

Da ξ ein H-Punkt von $G(x)$ ist, folgt mit Hilfe der absoluten Integrierbarkeit von $F(u)$ über $(-1,1)$ unmittelbar

$$\lim_{\varepsilon \to 0} r^+(\xi,\varepsilon) = 0, \quad \xi \notin A_1$$

Aus 3.07 und aus der Darstellung von $E^+(\xi,\varepsilon)$ folgt damit die Behauptung 3.06.

Der Satz 4 ermöglicht folgende Aussage für das homogene ungestörte Problem.

Satz 5: Es sei $a(x)$ aus der Klasse L_{A_1}. Die homogene singuläre Integralgleichung 1. Art

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{x-\xi}+a(x)\ln|x-\xi|\right\}\varphi(\xi)d\xi = o,\quad x \notin A_1,$$

hat aus der Klasse L_{A_1} nur die Lösung $h(\xi)$ aus 3.o4, wenn man von einem beliebigen Faktor C absieht. $h(\xi)$ ist in jedem Falle nicht trivial; d.h. $h(\xi) \not\equiv o$ für $\xi \notin A_1$.

Ueberdies genügt $h(\xi)$ in einer Umgebung eines jeden Punktes $\xi \notin A_1$ einer Hölderbedingung 1.o1 mit demjenigen Index, der an dieser Stelle zu $a(x)$ gehört.

Beweis: Wegen Satz 4 ist nur noch zu beweisen, daß $h(\xi)$ nicht trivial ist. Aus der Integralgleichung 1.o5 ergibt sich für das homogene ungestörte Problem:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|x-\xi|h(\xi)d\xi = e^{-A(x)},\quad x \in [-1,1]$$

Hieraus ergibt sich mit $h(\xi) \equiv o$ für $\xi \notin A_1$ ein Widerspruch.
Es sollen nun einige Spezialfälle der ungestörten Integralgleichung o.o5 diskutiert werden.

a. $a(x) \equiv o$ für $-1 < x < 1$

Man erhält natürlich in diesem Falle aus 3.o5 die bekannte Betz-Söhngensche Auflösungsformel

$$\varphi(\xi) = +\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-u^2}{1-\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{f(u)}{u-\xi}du + \frac{C}{\pi(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}},\quad \xi \notin A_2,$$

Dabei bedeutet C nicht die gleiche Konstante wie in 3.05

b. $a(x) = \text{const} = a$ für $-1 < x < 1$

Nach 3.05 erhält man folgende Lösungsschar

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} R_a(\xi,u) f(u) du + C\, h_a(\xi), \quad \xi \notin A_2$$

mit der Resolvente

$$R_a(\xi,u) = -\left(\frac{1-u^2}{1-\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\xi-u} + \int_{u}^{1} \frac{e^{a(u-x)}}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{a(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi-x} - \frac{1}{\ln 2 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} dx$$

mit der normierten homogenen Lösung

$$h_a(\xi) = \frac{-1}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{a}{\pi} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} e^{-ax}}{x-\xi} dx + \frac{1}{\ln 2} J_o(ia) \right\}, \quad \xi \in (-1,1)$$

Bei der Auswertung von $h_a(\xi)$ wurde die Beziehung

$$J_n(iz) = \frac{(i)^n}{\pi} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{e^{-zx}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} T_n(x) dx, \quad n = 0,1,2, \ldots$$

z beliebig komplex,

benutzt, wobei die $J_n(z)$ die Besselfunktionen und die $T_n(x)$ die Tschebyscheff-Polynome 1. Art darstellen.

Diese Integraldarstellung für die $J_n(iz)$ erhält man unmittelbar aus der bekannten Hansenschen Integraldarstellung für die Besselfunktionen mit ganzzahligem Index. Mit Hilfe obiger Integraldarstellung lassen sich die Integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{e^{-zx}x^m}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx,\quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

durch endlich viele Besselfunktionen mit ganzzahligem Index ausdrücken, indem man die Potenz x^m nach den Tschebyscheff-Polynomen $T_n(x)$ entwickelt.
Die in der Resolvente $R_a(\xi,u)$ und der homogenen Lösung $h_a(\xi)$ auftretenden Integrale werden in Kap. VI weiter ausgewertet.

c. Um solche Funktionen $a(x)$ zu finden, für die man die in der Resolvente $R(\xi,u)$ aus 3.05 auftretenden Integrale ausintegrieren kann, gibt man

3.08 $$s(x) = e^{-A(x)}a(x) \text{ mit } A(x) = \int_{x}^{} a(v)dv$$

geeignet vor. Unter welchen Voraussetzungen für $s(x)$ kann man Funktionen $a(x)$ aus L_{A_1} explizit angeben, so daß 3.08 gilt?
Die Funktion $s(x)$ sei über $(-1,1)$ stetig differenzierbar und streng größer Null. Durch Logarithmieren von 3.08 und anschließende Differentiation erhält man notwendig folgende Bernoullische Differentialgleichung für die gesuchte Funktion $a(x)$:

$$a'(x) - \frac{s'(x)}{s(x)}\,a(x) - a^2(x) = 0,\quad x \in (-1,1)$$

Mit Hilfe der Substitution

$$a(x) = \frac{1}{u(x)}$$

findet man folgende Lösungsschar notwendig

$$3.09 \qquad a(x) = \frac{s(x)}{d - \int_{-1}^{x} s(u)\,du}, \quad x \in (-1,1),$$

wobei für den freien Parameter d die Einschränkung gilt

$$d - \int_{-1}^{x} s(u)\,du > 0$$

Setzt man noch

$$A(x) = -\ln\left(d - \int_{-1}^{x} s(u)\,du\right), \quad x \in (-1,1),$$

so ist die Relation 3.08 erfüllt.

Mit Hilfe von 3.09 läßt sich unmittelbar überprüfen, ob für die betrachtete Funktion s(x) die Funktion a(x) zur Klasse L_{A_1} mit $A_1 = \{-1,1\}$ gehört. Hierzu einige Beispiele:

1. $s(x) = 1, \quad x \in (-1,1)$

Nach 3.09 ergibt sich die zulässige Funktion

$$a(x) = \frac{1}{d-x}, \quad d > 1, \quad x \in (-1,1)$$

Die Resolvente $R(\xi,u)$ lautet in diesem Falle :

$$R(\xi,u) = -\left(\frac{1-u^2}{1-\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\xi-u} + \frac{1}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{d-u}\int_u^1\left\{\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi-x} - \frac{1}{\ln 2}\frac{d-x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}dx$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$\int^x \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(u-\xi)}} = -\frac{1}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\ln\frac{1-\xi x+((1-\xi^2)(1-x^2))^{\frac{1}{2}}}{|x-\xi|} + K$$

$$x \neq \xi, \quad |\xi|<1,$$

wobei K die Integrationskonstante bedeutet, erhält man für die Resolvente folgende explizite Darstellung:

$$R(\xi,u) = -\left(\frac{1-u^2}{1-\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\xi-u} - \frac{1}{d-u}\ln\frac{1-\xi u+((1-\xi^2)(1-u^2))^{\frac{1}{2}}}{|u-\xi|}$$

$$+ \frac{1}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{d-u}\left\{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{\ln 2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin u\right)\left(\xi - \frac{d}{\ln 2}\right)\right\}$$

Die homogene Lösung $h(\xi)$ lautet:

$$h(\xi) = \frac{1}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\xi - \frac{d}{\ln 2}\right)$$

2. $s(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad x \in (-1,1)$

In diesem Falle erhält man nach 3.09 die zulässige Funktion

$$a(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{d-\arcsin x}, \quad d > \frac{\pi}{2},$$

$$x \in (-1,1)$$

Es ergibt sich folgende Resolvente

$$R(\xi,u) = -\left(\frac{1-u^2}{1-\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\xi-u} - \frac{1}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{d-\arcsin u} \cdot \ln \frac{1-\xi}{|u-\xi|} -$$

$$- \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{d-\arcsin u} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin u\right)\left(d - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin u\right)$$

und folgende homogene Lösung

$$h(\xi) = \frac{-1}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{d}{\ln 2} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{1-\xi}{1+\xi}\right]$$

3. $s(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

Nach 3.09 ergibt sich für die gesuchte Funktion a(x):

$$a(x) = \frac{2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{d-x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \arcsin x}, \quad d > \frac{\pi}{2}, \quad x \in (-1,1)$$

Nach Auswertung der auftretenden Integrale erhält man folgende Resolvente :

$$R(\xi,u) = -\left(\frac{1-x^2}{1-\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\xi-u} - \frac{2(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{d-u(1-u^2)^{\frac{1}{2}} \arcsin u} \ln \frac{1-\xi}{|u-\xi|} +$$

$$+ \frac{1}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2}{d-u(1-u^2)^{\frac{1}{2}}-\arcsin u} \left\{ (1-u)(\xi + \tfrac{1}{2}(1+u)) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4\ln 2} \left[(\tfrac{\pi}{2} - \arcsin u)(2d - \tfrac{\pi}{2} - \arcsin u) - 1+u^2 \right] \right\}$$

Die homogene Lösung lautet:

$$h(\xi) = - \frac{1}{\pi} (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1-\xi}{1+\xi} + \frac{1}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{2}{\pi} \xi - \frac{d\pi}{2\ln 2} \right\}$$

Kap. IV: Ausgeartete Zusatzkerne $D(\lambda) \neq 0$

Der Zusatzkern $g(x,\xi)$ in der Integralgleichung o.o5 sei ausgeartet:

$$g(x,\xi) = \lambda \sum_{i=1}^{p} a_i(x) b_i(\xi), \quad p \geq 1,$$

$$-1 \leq x, \xi \leq 1$$

Die Voraussetzungen für $g(x,\xi)$ sind sicher dann erfüllt, wenn man von den Funktionen $a_i(x)$ bzw. $b_i(\xi)$, $i=1, \ldots, p$, Hölderstetigkeit über $-1 \leq x \leq 1$ bzw. $-1 \leq \xi \leq 1$ fordert. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß die Funktionen $a_i(x)$ über $-1 \leq x \leq 1$ linear unabhängig sind. λ ist ein freier Parameter. Es sei daran erinnert, daß A_1 bzw. A_2 die Menge der Ausnahmestellen der Funktion $a(x)$ bzw. $f(x)$ aus o.o5 bedeutet. Ferner ist $A = A_1 \cup A_2$.

Für den $g(x,\xi)$ zugeordneten Kern $G(x,z)$ ergibt sich folgende Darstellung:

$$G(x,z) = \lambda \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(x) b_i(z), \quad -1 \leq x, z \leq 1,$$

mit $$\alpha_i = \int_{-1}^{x} e^{A(u)-A(x)} a_i(u)\,du, \quad i = 1, \ldots, p$$

Hiermit erhält man für den Kern $k(\xi,z)$ der Integralgleichung 2.o4:

4.o1 $$k(\xi,z) = \sum_{i=1}^{p} A_i(\xi) b_i(z)$$

mit $$A_i(\xi) = \frac{1}{\pi(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi - x} \alpha_i'(x) + \frac{\alpha_i(x)}{\ln 2 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} dx$$

$$i = 1, \ldots, p, \quad \xi \notin A_1$$

Aus 3.o1 und 3.o5 ersieht man, daß sich die Funktionen $A_i(\xi)$ auch folgendermaßen schreiben lassen:

$$A_i(\xi) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} R(\xi,u) a_i(u) du, \quad \xi \notin A_1$$

$R(\xi,u)$ ist die Resolvente des ungestörten Problems. Es ergibt sich damit folgender Zusammenhang zwischen dem Zusatzkern $g(u,z)$ und $k(\xi,z)$:

$$\lambda k(\xi,z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} R(\xi,u) g(u,z) du, \quad \xi \notin A_1$$

Diese Beziehung gilt auch, wenn $g(u,z)$ nicht ausgeartet ist.
Die Funktionen $A_i(\xi)$, $i=1, \ldots, p$, sind für $\xi \notin A_1$ über $(-1,1)$ linear unabhängig. Aus der Relation

$$\sum_{i=1}^{p} c_i A_i(\xi) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} R(\xi,u) \sum_{i=1}^{p} c_i a_i(u) du \equiv o$$

$$\xi \notin A_1$$

ergibt sich nach Satz 4:

$$\sum_{i=1}^{p} c_i a_i(x) \equiv o, \quad x \in [-1,1]$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der $a_i(x)$, $i=1, \ldots, p$, folgt hiermit notwendig obige Behauptung.

Ersetzt man in der Integralgleichung 2.o4 den Kern $k(\xi,z)$ durch die Darstellung 4.o1, so erhält man für die gesuchte Funktion $\varphi(\xi)$, sofern eine solche existiert, notwendig folgende Strukturaussage:

$$4.o2 \qquad \varphi(\xi) = d_C(\xi) + \frac{\lambda}{\pi} \sum_{i=1}^{p} k_i A_i(\xi)$$

$$= d_C(\xi) - \frac{\lambda}{\pi 2} \int_{-1}^{1} R(\xi,u) \sum_{i=1}^{p} k_i a_i(u)\,du, \quad \xi \notin A,$$

wobei $d_C(\xi)$ die Lösungsschar des ungestörten Problems bedeutet. Die k_i, $i = 1, \ldots, p$, sind noch zu bestimmen. Der mit λ multiplizierte Term in 4.o2 gibt die Korrektur an, die durch den Störkern $g(x,\xi)$ hervorgerufen wird. Geht man mit der Darstellung 4.o2 in die Integralgleichung 2.o4 ein, so erhält man:

$$\sum_{i=1}^{p} A_i(\xi) \left\{ k_i - \int_{-1}^{1} b_i(z) \left(d_C(z) + \frac{\lambda}{\pi} \sum_{j=1}^{p} k_j A_j(z) \right) dz \right\} = o$$

$$\xi \notin A$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $A_i(\xi)$, $i=1, \ldots, p$, ergibt sich hieraus folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der Konstanten k_i:

$$4.o3 \qquad \sum_{j=1}^{p} (\delta_{ij} - \lambda c_{ij}) k_j = d_i, \quad i = 1, \ldots, p,$$

mit den Abkürzungen :

$$c_{ij} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} b_i(z)A_j(z)dz = -\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} R(z;u)b_i(z)a_j(u)du\,dz$$

$$d_i = \int_{-1}^{1} b_i(z)d_C(z)dz,\quad i,j = 1, \ldots, p$$

δ_{ij} bedeutet das Kroneckersymbol. Man beachte, daß die Inhomogenitäten d_i obigen Gleichungssystems im allgemeinen linear von dem freien Parameter C abhängen. Die Koeffizienten c_{ij} dagegen sind nur von der Funktion a(x) und den Funktionen $a_j(x)$ und $b_i(\xi)$ des Zusatzkernes abhängig.

Im folgenden bedeute $D(\lambda)$ die Determinante der Koeffizientenmatrix $(\delta_{ij}-\lambda c_{ij})$ und D_{ij} das algebraische Komplement des Elementes der i.ten Zeile und der j.ten Spalte. Es sei $D(\lambda)\neq o$. Dann lautet die Lösung von 4.03:

$$k_i = \frac{1}{D(\lambda)}\cdot\sum_{j=1}^{p} D_{ji}d_j,\quad i=1,\ldots, p$$

Für $D(\lambda)\neq o$ lassen sich die Konstanten k_i eindeutig bestimmen, und man erhält folgende Lösungsschar aus L_A für die Integralgleichung o.o5:

$$4.04\quad \varphi(\xi) = d_C(\xi) + \frac{\lambda}{D(\lambda)\pi}\sum_{i,j=1}^{p} A_i(\xi)D_{ji}d_j,\quad \xi \notin A$$

$\varphi(\xi)$ läßt sich noch auf die Form o.o7 bringen. Für die Inhomogenitäten d_j ergibt sich nach 3.o5:

$$d_j = \int_{-1}^{1} b_j(z) d_C(z)\,dz$$

$$= \int_{-1}^{1} b_j(z) \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} R(z,u) f(u)\,du + C\, h(z) \right\} dz$$

$$j = 1, \ldots, p$$

Hieraus ersieht man sofort, daß d_j dann und nur dann von C unabhängig ist, wenn $b_j(z)$ zu der homogenen Lösung des ungestörten Problems $h(z)$ orthogonal ist. Durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge erhält man:

$$4.05 \quad d_j = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} R(z,u) b_j(z)\,dz\, f(u)\,du + C \int_{-1}^{1} b_j(z) h(z)\,dz$$

$$j = 1, \ldots, p$$

Bezüglich der Vertauschung der Integrationsreihenfolge siehe |1|, S.508-510. Ferner beachte man eine Bemerkung von Söhngen in |6|, S.254. Es sei

$$G_\lambda(v,z) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i,j=1}^{p} D_{ji} a_i(v) b_j(z)$$

Aus 4.04 und 4.05 ergibt sich dann folgender Satz für das durch den ausgearteten Zusatzkern $g(x,\xi)$ gestörte Problem:

Satz 6: Die Funktion $a(x)$ bzw. $f(x)$ sei aus der Klasse L_{A_1} bzw. L_{A_2}. Für die Funktionen des ausgearteten Zusatzkernes $g(x,\xi)$ seien die bereits erwähnten Voraussetzungen gültig.

Ist dann $D(\lambda) \neq 0$, so sind alle Lösungen der singulären Integralgleichung

$$4.06 \quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{x-\xi} + a(x)\ln|x-\xi| + \lambda g(x,\xi)\right\}\varphi(\xi)\,d\xi = f(x), \qquad x \notin A = A_1 \cup A_2,$$

die zur Klasse L_A gehören, gegeben durch folgende Darstellung:

$$4.07 \quad \varphi(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} R_g(\xi,u,\lambda) f(u)\,du + C\left\{h(\xi) - \frac{\lambda}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} R(\xi,v) G_\lambda(v,z) h(z)\,dv\,dz\right\} \qquad \xi \notin A,$$

mit der Resolvente

$$R_g(\xi,u,\lambda) = R(\xi,z) - \frac{\lambda}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} R(\xi,v) R(z,u) G_\lambda(v,z)\,dv\,dz$$

Dabei bedeuten $R(\xi,u)$ und $h(\xi)$ die Resolvente und die normierte homogene Lösung des ungestörten Problems. C ist ein freier Parameter. Ferner genügt $\varphi(\xi)$ in einer vollen Umgebung eines jeden Punktes $\xi \notin A$ einer Hölderbedingung 1.01 mit dem Hölderindex $\mathrm{Min}(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$, wobei die μ_i, $i=1,2,3$, die Hölderindizes von $a(x)$, $f(x)$ und $g(x,z)$ bezüglich x an der Stelle ξ bedeuten.

Die letzte Aussage ergibt sich sofort aus Satz 3, wenn man diesen auf die Integralgleichung 1.05 anwendet. Aus Darstellung 4.07 ist gut zu ersehen, mit welcher Korrektur

die Lösungsschar des ungestörten Problems zu versehen ist, wenn in der Integralgleichung 4.o6 der ausgeartete Zusatzkern $g(x,\xi)$ als Störung auftritt. Es stellt sich hier natürlich sofort die Frage, ob man mit Hilfe des Satzes 6 Lösungsfunktionen der Integralgleichung 4.o6 mit nicht ausgeartetem Zusatzkern $g(x,\xi)$ gewinnen kann. Hierauf wird in Kap. VII näher eingegangen.

Für die homogene Integralgleichung 4.o6 läßt sich wie beim ungestörten Problem noch folgende Aussage machen:

Satz 7: In 4.o6 sei $f(x)\equiv o$ in $-1 < x < 1$. Sonst seien die Voraussetzungen wie in Satz 6. Dann ist die homogene Lösung von 4.o6 nicht trivial.

Beweis: Nach 4.o4 ist der Beweis gegeben, wenn gezeigt werden kann, daß die Funktionen $A_i(\xi)$, $i=1, \ldots, p$, und $h(\xi)$ für $\xi \notin A_1$ über $(-1,1)$ linear unabhängig sind. Die Relation

$$c_o h(\xi) + \sum_{i=1}^{p} c_i A_i(\xi) \equiv o, \qquad \xi \notin A_1$$

läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$\frac{1}{\pi(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi - x} F_p'(x) + \frac{F_p(x)}{\ln 2 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} dx \equiv o$$

$$\xi \notin A_1$$

mit $$F_p(x) = c_o e^{-A(x)} + \sum_{i=1}^{p} c_i \alpha_i(x)$$

und $$\alpha_i(x) = \int_{-1}^{x} e^{A(u)-A(x)} a_i(u)\,du$$

Nach Satz 3 folgt hieraus notwendig:

$$c_o e^{-A(x)} + \sum_{i=1}^{p} c_i \alpha_i(x) \equiv o, \quad x \in [-1,1]$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit $e^{A(x)}$ und anschließende Differentiation für $x \notin A_1$:

$$\sum_{i=1}^{p} c_i a_i(x) \equiv o \qquad x \in [-1,1]$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $a_i(x)$, $i=1, \ldots, p$, sind notwendig alle c_i, $i=1, \ldots, p$, gleich Null. Es muß also auch c_o gleich Null sein. Damit ist der Beweis gegeben.

Kap. V: Ausgeartete Zusatzkerne mit $D(\lambda)=0$

Zuerst soll die Frage beantwortet werden, ob immer λ-Werte existieren, so daß die Determinante $D(\lambda)$ der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems 4.03 Null ist. $D(\lambda)$ hat folgende Struktur:

$$D(\lambda) = 1 + \lambda P(\lambda)$$

Hierbei ist $P(\lambda)$ ein Polynom höchstens $(p-1)$.ten Grades, dessen Koeffizienten nur von den Funktionen $a_i(x)$ und $b_i(\xi)$, $i=1,\ldots,p$, des Zusatzkernes $g(x,\xi)$ abhängen. Es kann der Fall eintreten, daß $P(\lambda)$ identisch verschwindet; d.h. $D(\lambda)=1$ für alle λ-Werte. Es sei dazu folgendes Beispiel betrachtet:

$$g(x,\xi) = \lambda a_1(x) b_1(\xi), \quad -1 \leqslant x,\xi \leqslant 1,$$

mit $$a_1(x) = 1 + (1+x)a(x)$$

Die Funktion $a(x)$ soll über $[-1,1]$ hölderstetig sein. Hat $a_1(x)$ diese spezielle Form, so läßt sich $A_1(z)$ wegen

$$\alpha_1(x) = \int_{-1}^{x} e^{A(u)-A(x)} a_1(u)\,du = e^{-A(x)} \left| (1+u)e^{A(u)} \right|_{-1}^{x} = 1+x$$

äußerst einfach berechnen; es ergibt sich:

$$A_1(z) = \frac{1}{\pi(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{z-x} + \frac{1+x}{\ln 2 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} dx = \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} \left(z + \frac{1}{\ln 2} \right)$$

Wählt man speziell

$$b_1(z) = z\left(z - \frac{1}{\ln 2}\right)$$

so erhält man:

$$P(\lambda) = -c_{11} = \frac{-1}{\pi} \int_{-1}^{1} b_1(z) A_1(z) dz = 0$$

Ist $P(\lambda)$ nicht identisch Null, so existiert mindestens ein λ_1 mit $D(\lambda_1)=0$, höchstens aber p solcher Werte. Was läßt sich in einem solchen Fall über die Existenz von Lösungen der Integralgleichung 0.05 aussagen.

Diese Frage ist äquivalent mit der Frage nach der Lösbarkeit des Gleichungssystems 4.03. Es sei

$$B_\lambda = (\delta_{ij} - \lambda c_{ij})$$

$$B_\lambda^+ = (\delta_{ij} - \lambda c_{ij}, d_j), \quad i,j = 1, \ldots, p$$

B_λ^+ ist die erweiterte Koeffizientenmatrix von 4.03. Für $D(\lambda)=\det(B_\lambda)=0$ gilt dann bekanntlich folgender Satz:

Ist der Rang von B_λ gleich $s < p$, so existiert dann und nur dann eine Lösung des Gleichungssystems 4.03, wenn der Rang von B_λ^+ ebenfalls gleich s ist. Ist dies der Fall, so ist die allgemeine Lösung von 4.03 (p-s)-parametrig.

Der Rang von B_λ^+ kann natürlich höchstens gleich s+1 sein. Es ist zu beachten, daß die d_j im allgemeinen noch linear von dem freien Parameter C abhängen. Es stellt sich also die Frage, ob der Rang von B_λ^+ wenigstens für bestimmte Werte des freien Parameters C gleich s ist. Hierzu sei

folgende spezielle Integralgleichung diskutiert:

$$5.01\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{x-\xi} + a(x)\ln|x-\xi| + a(x)\cdot b_1(\xi)\right\}\varphi(\xi)d\xi = a(x)$$

mit $$a(x) = \frac{1}{d-x},\quad d>1,\quad x\in(-1,1)$$

$$b_1(\xi) = \xi\left(\xi + \frac{d}{\ln 2}\right),\quad \xi\in[-1,1]$$

Nach 3.01 erhält man mit $A(x) = -\ln(d-x)$ als Lösung des ungestörten Problems:

$$d_C(\xi) = -\frac{1}{\ln 2(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} + C\,h(\xi)$$

mit $$h(\xi) = \frac{1}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\xi - \frac{d}{\ln 2}\right),\quad \xi\in(-1,1)$$

Hat obige Integralgleichung eine Lösung aus L_A mit $A = \{-1,1\}$, so gilt nach 4.02 notwendig:

$$5.02\quad \varphi(\xi) = d_C + \frac{\lambda}{\pi}k_1 A_1(\xi)$$

$$\xi \notin A$$

Die Konstante k_1 ergibt sich nach 4.03 aus der Gleichung:

$$(1-\lambda c_{11})k_1 = d_1$$

Um c_{11} zu berechnen, benötigt man $A_1(\xi)$:

$$A_1(\xi) = \frac{1}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{d+1}\left(\xi - \frac{d}{\ln 2}\right)\right\}$$

Die Konstanten der Bestimmungsgleichung von k_1 lauten:

$$c_{11} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} b_1(z)A_1(z)dz = \frac{1}{\pi\ \ln 2}\int_{-1}^{1}\frac{z^2}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}\,dz = \frac{1}{2\ln 2}$$

$$d_1 = \int_{-1}^{1} b_1(z)d_C(z)dz = -\frac{1}{\ln 2}\int_{-1}^{1}\frac{z^2}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}\,dz = -\frac{\pi}{2\ln 2}$$

Da $b_1(z)$ orthogonal zur homogenen Lösung $h(\xi)$ des ungestörten Problems ist, ist d_1 von C unabhängig. Zur Bestimmung von k_1 erhält man dann folgende Gleichung:

$$(1 - \frac{\lambda}{2\ln 2})k_1 = -\frac{\lambda}{2\ln 2}\ ,\quad \lambda \neq \lambda_1 = 2\ln 2$$

Für $\lambda \neq \lambda_1$ hat die Integralgleichung 5.o1 die Lösungsschar 5.o2 aus L_A mit der Konstanten

$$k_1 = \frac{\lambda}{\lambda - 2\ln 2}$$

während für die homogene Integralgleichung 5.o1 k_1 gleich Null zu setzen ist; d.h. die homogene Lösung $h(\xi)$ des ungestörten Problems ist auch homogene Lösung des gestörten Problems.
Ist dagegen $\lambda = \lambda_1$, so hat die Integralgleichung 5.o1 für keinen Parameterwert C eine Lösung. Dies liegt an der Orthogonalität von $b_1(z)$ zu $h(z)$. Die homogene Integralgleichung 5.o1 jedoch hat eine zweiparametrige Lösungsschar aus L_A:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{k_0(\xi - \frac{d}{\ln 2}) + k_1\right\}, \quad \xi \in (-1,1),$$

mit beliebigen Konstanten k_0 und k_1.

Die Werte λ_1 für die $D(\lambda) = 0$ ist, seien fortan Eigenwerte der Integralgleichung o.o5 genannt. Treffender wäre, solchen λ-Werten den Namen Pseudoeigenwert zu geben, da nach Satz 7 das homogene gestörte Problem auch für $D(\lambda) \neq 0$ eine nicht triviale Lösung hat. Für die durch den Zusatzkern $g(x,\xi) = \lambda a_1(x) b_1(\xi)$ gestörte Integralgleichung o.o5 läßt sich nun folgender Alternativsatz formulieren:

Satz 8: Es sei λ Eigenwert der Integralgleichung o.o5 mit $g(x,\xi) = \lambda a_1(x) b_1(\xi)$. Dann gilt folgende Alternative:

a. Ist die Funktion $b_1(z)$ nicht orthogonal zur homogenen Lösung $h(z)$ des ungestörten Problems, so hat sowohl das homogene als auch das inhomogene gestörte Problem aus der Klasse L_A nur die durch 5.o2 gegebene einparametrige Lösungsschar mit dem freien Parameter k_1 und der festen Konstanten

$$C = -\frac{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} R(z,u) f(u) b_1(z)\,du\,dz}{\int_{-1}^{1} h(z) b_1(z)\,dz}$$

b. Ist dagegen $b_1(z)$ orthogonal zu $h(z)$, so hat das homogene gestörte Problem aus der Klasse L_A nur die durch 5.o2 gegebene zweiparametrige Lösungsschar mit den freien Parametern C und k_1, während das inhomogene gestörte Problem dann und nur dann Lösungen aus L_A hat, wenn $b_1(z)$ sogar zur Lösungsschar $d_C(z)$ des inhomogenen ungestörten Problems orthogonal ist. Alle Lösungen aus L_A sind im inhomogenen gestörten Fall durch die ebenfalls zweiparametrige Lösungsschar 5.o2 mit den freien Parametern C und k_1 gegeben.

Welche Aussagen lassen sich für $p > 1$ machen? Um diese Frage einfacher beantworten zu können, wird für die aus gewissen Elementen einer (m,n)-Matrix B gebildete Unterdeterminante folgende abkürzende Schreibweise eingeführt:

$$B\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_q \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_q \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} b_{i_1k_1} & b_{i_1k_2} & \ldots & b_{i_1k_q} \\ b_{i_2k_1} & b_{i_2k_2} & \ldots & b_{i_2k_q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{i_qk_1} & b_{i_qk_2} & \ldots & b_{i_qk_q} \end{vmatrix}$$

mit $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_q \leq m$

$1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_q \leq n$

Eine solche Unterdeterminante wird auch Minor q.ter Ordnung der Matrix B genannt.
Die Matrix B_λ habe den Rang s. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann dann angenommen werden, daß die s Ungleichungen

$$B_\lambda\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i \\ 1 & 2 & \ldots & i \end{pmatrix} \neq 0 \qquad i=1,2, \ldots, s$$

erfüllt sind. Dies läßt sich durch entsprechendes Permutieren der Gleichungen und Umnumerieren der Unbekannten im Gleichungssystem 4.03 stets erreichen. Mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus erhält man dann bekanntlich für die Lösbarkeit des Gleichungssystems 4.03 die folgenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen:

$$5.03 \qquad B_\lambda^+ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & s & s+i \\ 1 & 2 & \dots & s & p+1 \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p-s$$

Die letzte Spalte dieser Unterdeterminante wird aus den Inhomogenitäten $d_1, \dots, d_s, d_{s+i}$; $i=1, \dots, p-s$, des Gleichungssystems 4.03 gebildet. Beachtet man, daß nach 4.05 gilt

$$d_j = f_j + C\, h_j, \quad j = 1, \dots, p,$$

mit

$$h_j = \int_{-1}^{1} b_j(z) h(z)\, dz$$

$$f_j = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} R(z,u)\, b_j(z) f(u)\, dz\, du$$

so läßt sich folgender Satz formulieren:

Satz 9: Es sei λ Eigenwert der Integralgleichung 0.05 mit dem ausgearteten Zusatzkern $g(x,\xi)$ aus Kap. IV. Die Koeffizientenmatrix B_λ des Gleichungssystems 4.03 habe den Rang s. Dann gilt für

a. das homogene gestörte Problem:

Ist 5.03 für $d_j = h_j$, $j = 1, \dots, p$, erfüllt, so sind alle Lösungen aus der Klasse L_A bis auf eine multipli-

kative Konstante durch die (p-s+1)-parametrige Lösungsschar

$$\varphi(\xi) = C\, h(\xi) + \frac{\lambda}{\pi}\sum_{i=1}^{p} k_i A_i(\xi), \quad \xi \notin A,$$

gegeben, wobei die k_i, i=1, ..., p, die allgemeine (p-s)-parametrige Lösung des Gleichungssystems 4.o3 mit $d_j = C\, h_j$, j=1, ..., p, bedeuten. Anderenfalls sind alle Lösungen aus L_A bis auf eine multiplikative Konstante durch die (p-s)-parametrige Lösungsschar

$$\varphi(\xi) = \frac{\lambda}{\pi}\sum_{i=1}^{p} k_i A_i(\xi), \quad \xi \notin A,$$

gegeben, wobei die k_i, i=1, ..., p, die allgemeine (p-s)-parametrige Lösung des homogenen Gleichungssystems 4.o3 bedeuten.

b. das inhomogene gestörte Problem:

Dieses hat dann und nur dann Lösungen aus L_A, wenn 5.o3 mindestens für ein spezielles C erfüllt ist. Ist dies der Fall, so sind alle Lösungen aus L_A durch die mindestens (p-s)-parametrige Lösungsschar

$$\varphi(\xi) = d_C + \frac{\lambda}{\pi}\sum_{i=1}^{p} k_i A_i(\xi), \quad \xi \notin A,$$

gegeben, wobei die k_i, i=1, ..., p, die allgemeine (p-s)-parametrige Lösung des Gleichungssystems 4.o3 bedeuten und C alle Werte durchläuft, für die 5.o3 gilt. Die Bedingungen

5.03 sind höchstens entweder für ein spezielles oder für beliebiges C erfüllt. Nur im letzteren Falle ist $\varphi(\xi)$ (p-s+1)-parametrig.

Zusatz: Das homogene bzw. inhomogene gestörte Problem hat sicher dann eine (p-s+1)-parametrige Lösungsschar aus L_A, wenn alle Funktionen $b_i(\xi)$ des Zusatzkernes $g(x,\xi)$, $i=1, \ldots, p$, zur homogenen Lösung $h(\xi)$ des ungestörten Problems bzw. zur Lösungsschar $d_C(\xi)$ des inhomogenen ungestörten Problems orthogonal sind.

Der Beweis des Zusatzes ist trivial, da in diesem Fall die Inhomogenitäten des Gleichungssystems 4.03 Null sind. Das folgende Beispiel zeigt, daß die Orthogonalität der $b_i(\xi)$ auf $h(\xi)$, $i=1,\ldots, p$, keine notwendige Bedingung dafür darstellt, daß das homogene gestörte Problem eine (p-s+1)-parametrige Lösungsschar aus L_A hat.

Die homogene Integralgleichung 0.05 mit

$$a(x) = \frac{1}{d-x}, \quad d > 1,$$

habe folgenden ausgearteten Zusatzkern:

$$g(x,\xi) = \lambda\{a_1(x)b_1(\xi) + a_2(x)b_2(\xi)\}$$

mit $a_1(x) = a(x)(1+x)+1$, $b_1(\xi) = b\xi$, $b \neq 0$

$a_2(x) = a(x)(1-x^2) - 2x$, $b_2(\xi) = 1$

Die normierte Lösung des homogenen ungestörten Problems lautet bekanntlich:

$$h(\xi) = \frac{1}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\xi - \frac{d}{\ln 2}\right), \quad \xi \in (-1,1)$$

Die $b_i(\xi)$, $i=1,2$, sind also nicht orthogonal zu $h(\xi)$. Die den $a_i(x)$ zugeordneten Funktionen $A_i(z)$, $i=1,2$, lassen sich explizit berechnen:

$$A_1(z) = \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}\left(z + \frac{1}{\ln 2}\right)$$

$$A_2(z) = \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}\left(-2z^2 + 1 + \frac{1}{2\ln 2}\right)$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix B_λ^+ von 4.03 hat dann folgendes Aussehen:

$$B_\lambda^+ = \begin{pmatrix} 1-\lambda\frac{b}{2}, & 0, & C\frac{b}{2} \\ \frac{1}{\ln 2}, & 1 - \frac{\lambda}{2\ln 2}, & -C\frac{d}{\ln 2} \end{pmatrix}$$

Für den Eigenwert $\lambda_1 = \frac{2}{b}$ erhält man notwendig $C = 0$ und die Beziehung

$$k_1 = \left(\frac{1}{b} - \ln 2\right)k_2$$

d.h. die Lösung des homogenen gestörten Problems ist bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig bestimmt:

$$\varphi(\xi) = \left(\frac{1}{b} - \ln 2\right)A_1(\xi) + A_2(\xi), \quad \xi \in (-1,1)$$

Für den Eigenwert $\lambda_2 = 2\ln 2$ existiert bis auf eine multiplikative Konstante nur die Lösung

$$\varphi(\xi) = A_2(\xi), \quad \xi \in (-1,1)$$

sofern für $2d \cdot \ln 2 \neq 1$ die Ungleichung

$$b \neq b_o = \frac{2d}{2d \cdot \ln 2 - 1}$$

erfüllt ist. Ist dagegen für $2d \cdot \ln 2 \neq 1$ $b = b_o$, so ist der Rang von B_λ^+ offensichtlich für beliebiges C gleich 1; d.h. die Bedingung 5.o3 ist für beliebiges C erfüllt. In diesem Falle hat das homogene gestörte Problem die zweiparametrige Lösungsschar

$$\varphi(\xi) = k_1\left\{A_1(\xi) - \frac{\pi}{d \cdot 2\ln 2} h(\xi)\right\} + k_2 A_2(\xi)$$

$$\xi \in (-1,1)$$

mit den freien Parametern k_1 und k_2.

Die beiden letzten Sätze zeigen, daß im Falle eines Eigenwertes das inhomogene gestörte Problem im allgemeinen keine Lösung aus L_A hat; denn die Bedingungen 5.o3 sind nur in speziellen Fällen erfüllt. Bemerkenswert ist, daß das homogene gestörte Problem für jeden λ-Wert nicht-trivial lösbar ist.

Kap. VI: Der Spezialfall a(x) = const.

Dieser wichtige Spezialfall ist für die ungestörte Integralgleichung o.o5 schon in Kap. III im Anschluß an Satz 6 kurz diskutiert worden. Die in der Resolvente $R_a(\xi,u)$ und in der normierten homogenen Lösung $h_a(\xi)$ auftretenden Integrale werden jetzt weiter ausgewertet. Zuvor müssen hierfür noch einige Integralformen betrachtet werden:

a. Es sei

$$Q_m(u) = \frac{1}{\pi}\int_u^1 \frac{x^m}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx, \quad u \in [-1,1],$$
$$m = o,1,2, \ldots.$$

Durch partielle Integration erhält man folgende zweigliedrige Rekursionsformel:

$$m\,Q_m(u) = (m-1)Q_{m-2}(u) + \frac{1}{\pi}\,u^{m-1}(1-u^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$m \geq 2,$$

mit
$$Q_o(u) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arcsin u$$
$$Q_1(u) = \frac{1}{\pi}(1-u^2)^{\frac{1}{2}}$$

Hiermit lassen sich die $Q_m(u)$ explizit berechnen:

$$Q_{2k+1}(u) = \frac{Q_1(u)}{\binom{k+\frac{1}{2}}{k}}\sum_{i=o}^{k}\binom{-\frac{1}{2}}{i}(-u^2)^i$$

$$Q_{2k}(u) = \binom{k-\frac{1}{2}}{k}\left\{ u\, Q_1(u) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-u^2)^i}{\binom{-\frac{3}{2}}{i}} + Q_0(u)\right\} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Setzt man $Q_m = Q_m(-1)$, so erhält man:

$$Q_m = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & m = 2q+1 \\ \text{für} & q = 0,1,\ \ldots \\ \binom{q-\frac{1}{2}}{q} & m = 2q \end{array} \right\}$$

b. Es sei:

$$L_m(\xi,u) = \frac{1}{\pi} \int_u^1 \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} x^m}{\xi - x}\, dx, \quad \xi \neq u,$$

$$\xi \in (-1,1),\ u \in [-1,1],$$
$$m = 0,1,2,\ldots.$$

Setzt man

$$T_n(\xi,u) = \frac{1}{\pi} \int_u^1 \frac{x^n}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{dx}{(\xi - x)}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

so erhält man:

$$L_m(\xi,u) = T_m(\xi,u) - T_{m+2}(\xi,u)$$

$T_n(\xi,u)$ läßt sich integrieren:

$$T_n(\xi,u) = -\sum_{\nu=0}^{n-1} \xi^{n-1-\nu} Q_\nu(u) - \frac{\xi^n}{\pi(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \ln \frac{1-\xi u+((1-\xi^2)(1-u^2))^{\frac{1}{2}}}{|u-\xi|}$$

Damit ergibt sich für die $L_m(\xi,u)$:

$$L_m(\xi,u) = \sum_{\nu=0}^{m+1} \xi^{m+1-\nu}\left\{Q_\nu(u) - Q_{\nu-2}(u)\right\}$$

$$- \frac{1}{\pi} \xi^m (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1-\xi u+((1-\xi^2)(1-u^2))^{\frac{1}{2}}}{|u-\xi|}$$

mit $Q_{-\nu}(u) = o$ für $\nu = 1,2,3,\ldots$
Setzt man $L_m(\xi) = L_m(\xi,-1)$, so findet man:

6.01 $$L_m(\xi) = \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} \binom{-\frac{3}{2}}{\mu} \xi^{m+1-2\mu} = \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} (-1)^\mu \binom{\frac{1}{2}}{\mu} \xi^{m+1-2\mu}$$

$m = o, 1, 2, \ldots$

c. Es sei:

$$I_m(u,a) = \frac{1}{\pi} \int_u^1 \frac{e^{-ax} x^m}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} dx, \quad u \in [-1,1]$$

$m = o,1,2, \ldots.$

Durch partielle Integration ergibt sich für $a \neq o$ folgende viergliedrige Rekursionsformel:

$$a\, I_{m+1}(u,a) = (m+2) I_m(u,a) + a\, I_{m-1}(u,a) - (m+1) I_{m-2}(u,a) - \frac{1}{\pi} e^{-au} u^{m-1} (1-u^2)^{\frac{1}{2}}, \quad m \geq 2$$

Leider lassen sich für die drei Startfunktionen $I_0(u,a)$, $I_1(u;a)$ und $I_2(u,a)$ keine expliziten Terme angeben. Mit Hilfe der $Q_m(u)$ können die $I_m(u,a)$ durch Reihen dargestellt werden. Es ist

$$I_m(u,a) = \frac{1}{\pi} \int_u^1 \frac{x^m}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-ax)^\mu}{\mu!}\, dx$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe bezüglich x kann die Summation mit der Integration vertauscht werden:

6.02 $$I_m(u,a) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-a)^\mu}{\mu!} Q_{m+\mu}(u), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

d. Es sei:

$$E(\xi,u,a) = \frac{1}{\pi} \int_u^1 \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} e^{-ax}}{\xi - x}\, dx, \quad u \neq \xi,$$

$$u \in [-1,1], \quad \xi \in (-1,1$$

$E(\xi,u,a)$ läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$E(\xi,u,a) = -\frac{1}{\pi}\int_u^1 \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi-x}(e^{-a\xi}-e^{-ax})dx + \frac{1}{\pi}e^{-a\xi}\int_u^1 \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi-x}dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_u^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-a)^\nu}{\nu!}P_\nu(x,\xi)dx + \frac{1}{\pi}e^{-a\xi}\int_u^1 \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi-x}dx$$

mit $P_\nu(x,\xi) = \frac{\xi^\nu - x^\nu}{\xi-x} = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} x^{\nu-1-\mu}\xi^\mu$

$\nu = 1, 2, 3, \ldots$

Aus der Abschätzung

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-a)^\nu}{\nu!}P_\nu(x,\xi)\right| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|a|^\nu}{(\nu-1)!} = |a|e^{|a|},$$

$x, \xi \in [-1,1]$,

folgt die gleichmäßige Konvergenz der Reihe bezüglich x und ξ. In obiger Darstellung für $E(\xi,u,a)$ darf also die Summation mit der Integration vertauscht werden. Man erhält mit Hilfe von b. folgende Reihe für $E(\xi,u,a)$:

$$E(\xi,u,a) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-a)^\nu}{\nu!}L_\nu(\xi,u)$$

Setzt man $E(\xi,a) = E(\xi,-1,a)$, so ergibt sich

$$E(\xi,a) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-a)^\nu}{\nu!}L_\nu(\xi)$$

Für die normierte homogene Lösung $h_a(\xi)$ und die Resolvente $R_a(\xi,u)$ der ungestörten Integralgleichung o.o5 mit $a(x) = a$ lassen sich jetzt folgende integralfreie Darstellungen angeben:

$$h_a(\xi) = \frac{1}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{ a\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-a)^\nu}{\nu!} L_\nu(\xi) - \frac{1}{\ln 2} J_0(ia)\right\}, \quad |\xi| < 1$$

mit $$J_0(ia) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2\mu}}{(\mu!)^2}$$

$$L_\nu(\xi) = \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{\nu+1}{2}\right]} (-1)^\mu \binom{\frac{1}{2}}{\mu} \xi^{\nu+1-2\mu}$$

$$R_a(\xi,u) = -\left(\frac{1-u^2}{1-\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\xi-u}$$

$$+ \frac{\pi\, e^{au}}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-a)^\nu}{\nu!} \left\{ a\, L_\nu(\xi,u) - \frac{1}{\ln 2} Q_\nu(u)\right\}$$

$$-1 < \xi, u < 1, \quad u \neq \xi$$

Die in der normierten homogenen Lösung $h_a(\xi)$ und der Resolvente $R_a(\xi,u)$ des ungestörten Problems auftretenden Integralformen können also auf Kosten von unendlichen Reihen beseitigt werden.

Um die logarithmische Singularität von $R_a(\xi,u)$ offenbar zu machen, empfiehlt sich folgende Schreibweise:

$$R_a(\xi,u) = -\left(\frac{1-u^2}{1-\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\xi-u} - a\, e^{a(u-\xi)} \ln \frac{1-\xi u+((1-\xi^2)(1-u^2))^{\frac{1}{2}}}{|u-\xi|}$$

$$+ \frac{\pi\, e^{au}}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-a)^\nu}{\nu!} \left\{ a \sum_{\mu=0}^{\nu+1} \xi^{\nu+1-\mu}(Q_\mu(u)-Q_{\mu-2}(u)) - \frac{1}{\ln 2} Q_\nu(u) \right\}$$

$$-1<\xi,u<1,\ u \neq \xi$$

Damit ist das ungestörte Problem für den Spezialfall $a(x)=a$ hinreichend behandelt.

Es soll nun die Resolvente $R_g(\xi,u,\lambda)$ des gestörten Problems aus 4.07 noch für den Fall untersucht werden, daß die Funktionen $a_i(x)$ und $b_i(\xi)$ des Zusatzkernes, $i=1, \ldots, p$, Polynome in x bzw. in ξ sind. Es reicht aus, solche Störkerne zu betrachten; denn jeder stetige Zusatzkern $g(x,\xi)$ läßt sich bekanntlich durch Kerne der Art

$$6.03 \quad g_n(x,\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^{i-1} \xi^{j-1} = \sum_{i=1}^{n} x^{i-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi^{j-1}$$

gleichmäßig approximieren. Man braucht nur x^{i-1} mit $a_i(x)$ und

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi^{j-1}$$

mit $b_i(\xi)$ zu identifizieren, $i=1, \ldots, n$.

Aus der Darstellung der Resolvente $R_g(\xi,u,\lambda)$ in 4.o7 ist ersichtlich, daß es genügt, folgende beiden Integralformen zu betrachten:

$$V_i(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} R(\xi,v)v^i dv, \quad i = o,1,2, \ldots$$

$$Z_j(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} R(z,u)z^j dz, \quad j = o,1,2, \ldots$$

$$-1 < \xi,u < 1$$

Nach 3.o5 und 3.o1 ergibt sich mit $C = o$ und $f(v) = v^i$ für $V_i(\xi)$:

$$V_i(\xi) = -\frac{1}{\pi(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi-x}\alpha_i'(x) + \frac{\alpha_i(x)}{\ln 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}dx$$

mit $\alpha_i(x) = \int_{-1}^{x} e^{a(v-x)}v^i dv, \quad i = o, 1, \ldots$

Die $\alpha_i(x)$ lassen sich berechnen:

$$\alpha_i(x) = \sum_{\nu=o}^{i} \nu!\binom{\nu-i-1}{\nu}a^{-\nu-1}x^{i-\nu} - K_i e^{-ax}, \quad a \neq o,$$

mit $K_i = e^{-a}(-1)^i \sum_{\nu=o}^{i} \nu!\binom{i}{\nu}a^{-\nu-1}$

$$\alpha_i(x) = \frac{1}{i+1}(x^{i+1}-(-1)^{i+1}), \quad a = o$$

Im folgenden wird nur der Fall $a \neq o$ betrachtet, da sich der Fall $a = o$ vollkommen analog behandeln läßt. Durch Einsetzen von $\alpha_i(x)$ erhält man für die $V_i(\xi)$ folgende Darstellung:

$$V_i(\xi) = \frac{-1}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \sum_{\nu=o}^{i} a^{-\nu-1} \nu! \binom{\nu-i-1}{\nu} \left\{ (i-\nu) L_{i-\nu-1}(\xi) + \frac{1}{\ln 2} Q_{i-\nu} \right\}$$

$$- K_i h_a(\xi) \qquad \text{mit } L_{-1}(\xi) = o$$

Ersetzt man $L_{i-\nu-1}(\xi)$ durch die Darstellung 6.01 und ordnet nach Potenzen von ξ, so erhält man nach einigen Umformungen folgende einfache Form für die $V_i(\xi)$:

$$V_i(\xi) = - K_i h_a(\xi) - \frac{1}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=o}^{i} v_j^{(i)} \xi^j$$

$$\text{mit} \quad v_o^{(i)} = a^{-i-1} \sum_{\mu=o}^{\left[\frac{i}{2}\right]} a^{2\mu} (i-2\mu)! \binom{-2\mu-1}{i-2\mu} \cdot \binom{\mu - \frac{3}{2}}{\mu} \left\{ 2\mu - \frac{2\mu-1}{\ln 2} \right\}$$

$$v_j^{(i)} = i\, a^{j-i-1} \sum_{\mu=o}^{\left[\frac{i-j}{2}\right]} a^{2\mu} (i-2\mu-j)! \binom{-2\mu-j}{i-2\mu-j} \cdot \binom{\mu - \frac{3}{2}}{\mu}$$

$$j = 1, \ldots, i; \; i = o, 1, \ldots$$

Die Funktionen $Z_j(u)$, $j=o,1,\ldots$, lassen sich nach 3.05 folgendermaßen schreiben:

$$Z_j(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-u^2}{1-z^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{z^j}{u-z} \, dz$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \int_{u}^{1} \frac{e^{a(u-x)}}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ a \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{z-x} - \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} z^j \, dx \, dz$$

Durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge (vgl. hierzu |1|, S.51o) ergibt sich für $Z_j(u)$ folgender Ausdruck:

$$Z_j(u) = -(1-u^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mu=0}^{j-1} Q_{j-1-\mu} u^\mu + \int_u^1 e^{a(u-x)} \left\{ a(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mu=0}^{j-1} Q_{j-1-\mu} x^\mu - \frac{1}{\ln 2} \frac{Q_j}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} d$$

Für a=o erhält man:

$$Z_j(u) = -(1-u^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mu=0}^{j-1} Q_{j-1-\mu} u^\mu + \frac{1}{\ln 2} Q_j(\arcsin u - \frac{\pi}{2})$$

Für a≠o ergibt sich dann:

$$Z_j(u) = -(1-u^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mu=0}^{j-1} Q_{j-1-\mu} u^\mu + \pi e^{au} \left\{ a \sum_{\mu=0}^{j-1} Q_{j-1-\mu} (I_\mu(u,a) - I_{\mu+2}(u,a)) - \frac{1}{\ln 2} Q_j I_o(u,a) \right\}$$

Ersetzt man die $I_m(u,a)$ durch die Darstellung 6.o2, so erhält man:

$$Z_j(u) = -(1-u^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mu=0}^{j-1} Q_{j-1-\mu} u^\mu + \pi e^{au} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-a)^\nu}{\nu!} \left\{ a \sum_{\mu=0}^{j-1} Q_{j-1-\mu} (Q_{\mu+\nu}(u) - Q_{\mu+\nu+2}(u)) - \frac{1}{\ln 2} Q_j Q_\nu ($$

$$j=1,2,3,\ldots$$

Die Integralgleichung o.o5 sei durch den speziellen Zusatzkern $\lambda g_n(x,\xi)$ aus 6.o1 gestört. Dann lautet die Resolvente $R_g(\xi,u,\lambda)$ aus 4.o7, sofern $D(\lambda) \neq o$ ist:

$$R_g(\xi,u,\lambda) = R_a(\xi,u) - \lambda \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{D_{ji} a_{jk}}{D(\lambda)} V_{i-1}(\xi) Z_{k-1}(u)$$

$$\xi \neq u, \quad -1<\xi,u<1$$

Um die algebraischen Komplemente D_{ji}, $i,j=1, \ldots, n$, und die Determinante $D(\lambda)$ der Koeffizientenmatrix B_λ zu berechnen, werden die c_{ij}, $i,j = 1, \ldots, n$, benötigt:

$$c_{ij} = -\frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} R(z,u) u^{j-1} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} z^{k-1} du\, dz$$

$$= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \int_{-1}^{1} z^{k-1} V_{j-1}(z) dz$$

mit $V_{j-1}(\xi) = K_{j-1} h_a(\xi) - \frac{1}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \sum_{\mu=o}^{j-1} v_\mu^{(j-1)} \xi^\mu$

Zur weiteren Auswertung der c_{ij} werden die Integrale

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} z^m h_a(z) dz = \frac{a}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{z^m}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} \sum_{\nu=o}^{\infty} \frac{(-a)^\nu}{\nu!} L_\nu(z) dz - \frac{1}{\ln 2} J_o(ia) Q_m$$

$$m = o,1,2, \ldots$$

benötigt. Wegen der Abschätzung

$$\left|\binom{\frac{1}{2}}{i}\right| \leq 1, \quad i = o,1, \ldots$$

erhält man für $L_\nu(z)$ folgende Schranke:

$$|L_\nu(z)| \leq \left[\frac{\nu+1}{2}\right] + 1 \leq \nu+1, \quad |z| \leq 1$$

$$\nu = 0, 1, \ldots$$

Hieraus ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz der Reihe unter dem Integralzeichen. Es läßt sich also die Summation mit der Integration vertauschen. Beachtet man noch

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{z^m}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} L_\nu(z)\,dz = \sum_{i=0}^{\left[\frac{\nu+1}{2}\right]} (-1)^i \binom{\frac{1}{2}}{i} Q_{\nu+m+1-2i}$$

so findet man für obige Integrale:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} z^m h_a(z)\,dz = a\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-a)^\nu}{\nu!} \sum_{i=0}^{\left[\frac{\nu+1}{2}\right]} (-1)^i \binom{\frac{1}{2}}{i} Q_{\nu+m+1-2i}$$

$$- \frac{1}{\ln 2} J_0(ia) Q_m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

Hieraus folgt für die c_{ij}:

$$c_{ij} = -\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left\{ K_{j-1} \left(a\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-a)^\nu}{\nu!} \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{\nu+1}{2}\right]} (-1)^\mu \binom{\frac{1}{2}}{\mu} Q_{\nu+k-2\mu} \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\ln 2} J_0(ia) Q_{k-1} \right) - \sum_{\mu=0}^{j-1} v_\mu^{(j-1)} Q_{\mu+k-1} \right\}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Abschließend sei noch die normierte homogene Lösung des gestörten Problems angegeben:

$$\varphi_h(\xi) = h_a(\xi) - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{D_{ji} a_{jk}}{D(\lambda)} V_{i-1}(\xi) \int_{-1}^{1} h_a(z) z^{k-1} dz$$

Die auftretenden Integrale werden oben berechnet. Hiermit ist auch das gestörte Problem für Zusatzkerne vom Typ 6.03 im Spezialfall $a(x)=a$ hinreichend behandelt. Alle auftretenden Integralformen wurden in endliche oder unendliche Reihen überführt. Da man sich meistens nicht für die Resolvente $R_g(\xi,u,\lambda)$ interessiert, sondern für gegebenes $f(x)$ nur Lösungen $\varphi(\xi)$ aus L_A sucht, geht man zur numerischen Durchführung sinnvollerweise von dem Gleichungssystem 4.03 aus. Lassen sich die k_i, $i=1,\ldots,p$, bestimmen, so ist für das gestörte Problem die allgemeine Lösungsschar aus L_A durch 4.02 gegeben.

Kap. VII: Allgemeiner Zusatzkern mit Fehlerabschätzungen

Läßt sich die o.o5 zugeordnete Integralgleichung 2.o4, deren Kern $k(\xi,z)$ im allgemeinen nicht quadratisch integrabel ist, nicht unmittelbar lösen - was meist der Fall sein wird -, so wird man den allgemeinen Zusatzkern durch einen ausgearteten Kern ersetzen. Zur einfacheren numerischen Behandlung wird man oft auch für die Inhomogenität $f(x)$ von o.o5 eine für die praktische Durchführung geeignetere Funktion nehmen. Im folgenden soll nun versucht werden, die bei diesem Ersetzungsprozeß gemachten Fehler unter gewissen Voraussetzungen betragsmäßig abzuschätzen, sofern die Integralgleichung o.o5 mit dem allgemeinen Zusatzkern Lösungen aus L_A hat. Ferner werden Aussagen für den Fall gemacht, daß der allgemeine Zusatzkern gleichmäßig durch ausgeartete Kerne approximiert wird.

Multipliziert man die Integralgleichung 2.o4 mit $(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}$, so erhält man folgende Integralgleichung 2. Art:

$$7.o1 \qquad y(\xi) - \lambda \int_{-1}^{1} K(\xi,z)y(z)dz = r(\xi)$$

mit $\quad y(\xi) = (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}\varphi(\xi)$

$$r(\xi) = (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} d_C(\xi)$$

$$K(\xi,z) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\xi^2}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{2}} k(\xi,z), \quad \xi \notin A$$

Der Kern $K(\xi,z)$ ist im allgemeinen nicht quadratisch integrabel, was im folgenden keineswegs störend ist.

Ferner sei folgende 7.o1 approximierende Integralgleichung betrachtet:

$$7.o2 \qquad y_n(\xi) - \lambda \int_{-1}^{1} K_n(\xi,z) y_n(z) dz = r_n(\xi), \quad \xi \in [-1,1],$$

wobei $K_n(\xi,z)$ und $r_n(\xi)$ als Approximationen von $K(\xi,z)$ und $r(\xi)$ aufzufassen sind. Der Kern $K_n(\xi,z)$ braucht vorerst nicht notwendig ausgeartet zu sein. Die Integralgleichung 7.o2 habe eine eindeutige Lösung der Form:

$$7.o3 \qquad y_n(\xi) = r_n(\xi) + \lambda \sum_{i=1}^{n} k_i A_i^+(\xi)$$

wie es bei ausgearteten Kernen $K_n(\xi,z)$ sicher der Fall ist, sofern nur die charakteristische Determinante von Null verschieden ist. Die k_i, $i=1, \ldots, n$, hängen natürlich von der Inhomogenität $r_n(\xi)$ ab. Ohne die spezielle Bedeutungen von $K(\xi,z)$ und $r(\xi)$ heranzuziehen, läßt sich dann allgemein folgender Satz beweisen:

Satz 10: Es seien die folgenden Voraussetzungen für die Integralgleichungen 7.o1 und 7.o2 erfüllt:

1.) a. $|r(\xi)| \leq r, \quad |r_n(\xi)| \leq r_n, \quad \xi \in [-1,1]$

b. $|r(\xi) - r_n(\xi)| \leq d_n, \quad \xi \in [-1,1]$

c. $\int_{-1}^{1} |K(\xi,z) - K_n(\xi,z)| dz \leq \varepsilon_n$

2.) $$\left|\sum_{i=1}^{n} k_i A_i^+(\xi)\right| \leq S_n r_n, \qquad \xi \in [-1,1],$$

wobei S_n von $r_n(\xi)$ unabhängig ist.

3.) Die Integralgleichung 7.o1 habe für $|\xi| \leq 1$ eine beschränkte Lösung:

$$|y(\xi)| \leq M = \operatorname{Sup}_x |y(x)|, \quad \xi \in [-1,1]$$

4.) Die Integralgleichung 7.o2 habe die eindeutige Lösung 7.o3.
Um die Allgemeinheit nicht zu stören, sei von den beiden Kernen und Inhomogenitäten der Integralgleichungen 7.o1 und 7.o2 weiterhin nur vorausgesetzt, daß sie so geartet sind, daß die im folgenden Beweis durchgeführten Operationen zulässig sind.

Ist dann die Bedingung

$$1 - |\lambda|\varepsilon_n(1+|\lambda|S_n) > 0$$

erfüllt, so gilt für die Integralgleichung 7.o1:

1. Es existiert keine beschränkte homogene nichttriviale Lösung; d.h. λ ist kein Eigenwert. Die Funktion $y(\xi)$ ist also die einzige beschränkte Lösung von 7.o1.

2. Für die Differenz zwischen $y(\xi)$ und $y_n(\xi)$ gilt die Abschätzung:

$$|y(\xi)-y_n(\xi)| \leq \frac{|\lambda|\varepsilon_n(1+|\lambda|S_n)^2 \cdot r}{1-|\lambda|\varepsilon_n(1+|\lambda|S_n)} + d_n(1+|\lambda|S_n)$$

$$\xi \in [-1,1]$$

Beweis: Wegen 7.o1 erhält man:

$$7.o5 \qquad y(\xi) - \lambda \int_{-1}^{1} K_n(\xi,z)y(z)dz = F(\xi), \quad \xi \in [-1,1],$$

$$\text{mit} \qquad F(\xi) = r(\xi) + \lambda \int_{-1}^{1} \left[K(\xi,z) - K_n(\xi,z)\right]y(z)dz$$

Mit Hilfe der Voraussetzungen 1.) a. und c. ergibt sich die Abschätzung:

$$|F(\xi)| \leq r + |\lambda| M\varepsilon_n, \qquad |\xi| \leq 1$$

Hiermit ergibt sich für die Lösung von 7.o5 nach den Voraussetzungen 2.) - 4.):

$$|y(\xi)| = |F(\xi) + \lambda \sum_{i=1}^{n} k_i A_i^+(\xi)|$$

$$M \leq r + |\lambda| M\varepsilon_n + |\lambda| S_n (r + |\lambda| M\varepsilon_n)$$

Hieraus folgt, sofern die Bedingung 7.o4 erfüllt ist:

$$M \leq \frac{(1+|\lambda| S_n)r}{1-|\lambda|(1+|\lambda| S_n)\varepsilon_n}$$

Gäbe es eine beschränkte homogene Lösung von 7.o1, die nicht trivial ist. so erhielte man nach dieser Abschätzung für r = o einen Widerspruch. Aus diesem Grunde kann es auch nur eine beschränkte Lösung der inhomogenen Integralgleichung

7.o1 geben; denn die Differenz zweier solcher Lösungen wäre eine beschränkte homogene Lösung von 7.o1. Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Subtrahiert man die Integralgleichung 7.o2 von der Integralgleichung 7.o5, so erhält man:

$$\phi(\xi) - \lambda \int_{-1}^{1} K_n(\xi,z)\phi(z)dz = F(\xi) - r_n(\xi)$$

mit $\phi(\xi) = y(\xi) - y_n(\xi)$

Wegen der Abschätzung

$$|F(\xi)-r_n(\xi)| \leq |F(\xi)-r(\xi)|+|r(\xi)-r_n(\xi)| \leq |\lambda|M\varepsilon_n+d_n$$

ergibt sich nach Voraussetzung 2.) und 4.):

$$|\phi(\xi)|=|F(\xi)-r_n(\xi)+\lambda\sum_{i=1}^{n} k_i^+ A_i^+(\xi)| \leq (|\lambda|M\varepsilon_n+d_n)(1+|\lambda|S_n),$$

$$|\xi| \leq 1$$

Ersetzt man M durch obige Abschätzung, so findet man die zweite Behauptung bestätigt.

Dieser Satz findet sich mit etwas anderen Voraussetzungen in |2|, S.137, so daß die Beweisführung größtenteils übernommen werden konnte. Es läßt sich noch folgende Folgerung ziehen:
Gilt für den Grenzfall $n \longrightarrow \infty$

$$\varepsilon_n,\ d_n \longrightarrow 0,$$
$$S_n \leq S \quad \text{für } n \geq N,$$

so konvergiert offenbar $y_n(\xi)$ gleichmäßig gegen $y(\xi)$ für $\xi \in [-1,1]$.

Um diesen allgemeinen Satz auf unser spezielles Problem anwenden zu können, wird noch eine Schranke für den Ausdruck

$$S(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{s(x)}{\xi - x}\, dx, \qquad |\xi| < 1$$

benötigt. Ist $s(x)$ über $[-1,1]$ hölderstetig, so erhält man folgende Abschätzung :

$$|S(\xi)| \leq \frac{M}{\pi} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} |\xi - x|^{\mu-1} dx + |s(\xi)\xi|$$

7.06
$$\leq \frac{M}{\pi\mu} \left\{ (1-\xi)^{\mu} + (1+\xi)^{\mu} \right\} + |s(\xi)\xi|$$

$$\leq \frac{2^{\mu}}{\pi\mu} M + \operatorname{Max}_{u} |us(u)|, \quad u \in [-1,1]$$

Hierbei bedeutet M die Hölderkonstante und μ den Hölderindex von $s(x)$.
Ist $s(x)$ über $[-1,1]$ stetig differenzierbar, so lassen sich bessere Schranken für $S(\xi)$ finden. Mit der Relation

$$s(x) - s(\xi) = \int_{\xi}^{x} s'(z)dz = (x-\xi) \int_{0}^{1} s'(\xi + u(x-\xi))du$$

findet man :

$$S(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \int_{0}^{1} s'(\xi + u(x-\xi))du\, dx - s(\xi)\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{dx}{(\xi - x)}$$

Aus dieser Darstellung erhält man unmittelbar die drei folgenden Abschätzungen:

$$|S(\xi)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,|s'(\xi+u(x-\xi))|\,du\,dx + |\xi\, s(\xi)|$$

7.07

$$\leq \frac{1}{2} \operatorname*{Max}_{u} |s'(u)| + |\xi\, s(\xi)|$$

$$\leq \frac{1}{2} \operatorname*{Max}_{u} |s'(u)| + \operatorname*{Max}_{u} |u\, s(u)| \quad u \leq |1|, \quad |\xi| < 1$$

Im speziellen Fall kommt es darauf an, welche dieser Abschätzungen sich am besten auswerten läßt.

Der Satz 1o sei jetzt für den folgenden speziellen Fall diskutiert:

$$K(\xi,z) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\xi^2}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{2}} k(\xi,z), \quad K_n(\xi,z) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\xi^2}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{2}} k_n(\xi,z)$$

$$r(\xi) = (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} d_C(\xi), \quad r_n(\xi) = (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} d_{nC}(\xi)$$

Hierbei sind $k(\xi,z)$ und $d_C(\xi)$ in 2.o4 definiert. $k_n(\xi,z)$ bzw. $d_{nC}(\xi)$ ist der Kern bzw. die Inhomogenität der Integralgleichung 2.o4, wenn man in der Integralgleichung o.o5 den Zusatzkern $g(x,\xi)$ durch

$$g_n(x,\xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) b_i(\xi)$$

und $f(x)$ durch eine geeignete Funktion $f_n(x)$ ersetzt. Um die Fehlerschranken ε_n und d_n und die Schranken r, r_n und S_n des

Satzes 1o bestimmen zu können, wird von den Funktionen $a(x)$, $g(x,\xi)$, $g_n(x,\xi)$, $f(x)$ und $f_n(x)$ die zusätzliche Voraussetzung gemacht, daß sie über $-1 \leq x,\xi \leq 1$ nach x stetig differenzierbar sind. Für das Folgende würde auch Hölderstetigkeit genügen, wenn man davon absieht, daß die auftretenden Fehlerschranken schlechter werden. Letzteres ergibt sich aus dem Vergleich der Abschätzungen 7.o6 und 7.o7. Es sollen folgende Abschätzungen gelten:

$$|f(x)-f_n(x)| \leq d_{n1}, \quad |f'(x)-f_n'(x)| \leq d_{n2}$$

$$|f(x)| \leq f_1, \quad |f'(x)| \leq f_2, \quad |f_n(x)| \leq f_{n1}, \quad |f_n'(x)| \leq f_{n2}$$

7.o8

$$|g(x,\xi)-g_n(x,\xi)| \leq \varepsilon_{n1}, \quad |g'(x,\xi)-g_n'(x,\xi)| \leq \varepsilon_{n2}$$

$$|a_i(x)| \leq a_{i1}, \quad |a_i'(x)| \leq a_{i2}, \quad i=1,\ldots, n, \quad x,\xi \in [-1-]$$

Der Differentiationsstrich bedeutet hier und im folgenden immer Differentiation nach dem ersten Argument.

Beachtet man die Darstellung $d_C(\xi)$ bzw. $d_{nC}(\xi)$ in 2.o4, so ergibt sich:

$$r(\xi)-r_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi-x}E_n'(x) + \frac{E_n(x)}{\ln 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}dx$$

mit $$E_n(x) = \int_{-1}^{x} e^{A(u)-A(x)}\left[f_n(u)-f(u)\right]du$$

Man achte darauf, daß die Differenz $r(\xi)-r_n(\xi)$ nicht von dem freien Parameter C abhängt. Um für $|r(\xi)-r_n(\xi)|$ mit Hilfe von 7.o7 eine obere Schranke zu finden, werden folgende Abschätzungen benötigt:

a. $|E_n(x)| \leq d_{n_1} \int_{-1}^{x} e^{A(u)-A(x)}\,du$

$\leq d_{n_1} s_o (x+1) \leq 2 d_{n_1} s_o$

mit $s_o = \underset{u,x}{\mathrm{Max}}\ e^{A(u)-A(x)}, \qquad x,u \in [-1,1]$

b. $|E_n'(x)| = |f_n(x)-f(x)-a(x)E_n(x)|$

$\leq d_{n_1} + |a(x)||E_n(x)|$

$\leq d_{n_1}(1+s_1 s_o(x+1)) \leq d_{n_1}(1+2s_1 s_o)$

mit $s_1 = \underset{u}{\mathrm{Max}}|a(u)|, \quad x,u \in [-1,1]$

c. $|E_n''(x)| = |f_n'(x)-f'(x)-a'(x)E_n(x)-a(x)E_n'(x)|$

$\leq d_{n_2}+s_1 d_{n_1}+s_o(s_1+s_2)(x+1)d_{n_1}$

$\leq d_{n_2}+(s_1+2(s_1+s_2)s_o)d_{n_1}$

mit $s_2 = \underset{u}{\mathrm{Max}}|a'(u)|, \quad x,u \in [-1,1]$

Mit diesen Abschätzungen ergibt sich:

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{-1}^{1} \frac{E_n(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx\right| \leq d_{n_1} s_o \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx = d_{n_1} s_o$$

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi-x} E_n'(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} |E_n'(\xi+u(x-\xi))|\,du\,dx$$

$$+ |\xi||E_n'(\xi)|$$

$$\leq \tfrac{1}{2}(d_{n_2}+s_1 d_{n_1}) + \tfrac{1}{2}(s_1+s_2)s_o d_{n_1}(1-\tfrac{1}{2}\xi)+|\xi|(1+s_1 s_o(1+\xi)d_{n_1})$$

$$\leq \tfrac{1}{2}\, d_{n_2}+s d_{n_1}, \quad |\xi| < 1,$$

$$\text{mit } s = 1 + \tfrac{1}{2}\, s_1 + \tfrac{1}{4}\, s_o(11s_1+3s_2)$$

Hiermit erhält man schließlich die Abschätzung

7.09 $$|r(\xi) - r_n(\xi)| \leq d_n, \quad |\xi| \leq 1,$$

$$\text{mit } d_n = \tfrac{1}{2}\, d_{n_2} + (s + \tfrac{1}{\ln 2}\, s_o) d_{n_1}$$

Die Abschätzung 7.09 gilt auch für die Randpunkte, da $r(\xi)-r_n(\xi)$ über $[-1,1]$ eine stetige Funktion ist, wenn man die Funktionswerte an den Randpunkten durch die Grenzwerte bei rechts- bzw. linksseitiger Annäherung definiert. Die Schranke d_n hängt nur von den Schranken d_{n_1} und d_{n_2} und der Funktion $a(x)$ ab. Für den Spezialfall $a(x) = a > 0$ und $A(x) = ax$ ergibt sich:

$$s_o = e^{2a}, \quad s_1 = s_2 = a, \quad s = 1 + a(\tfrac{1}{2} + 7e^{2a})$$

$$d_n = \tfrac{1}{2}\, d_{n_2} + (1 + \tfrac{1}{2}\, a + e^{2a}(\tfrac{1}{\ln 2} + 7a)) d_{n_1}$$

Auf dem gleichen Wege, auf dem man die Abschätzung 7.09 gefunden hat, erhält man:

$$(1-z^2)^{\frac{1}{2}} |K(\xi,z) - K_n(\xi,z)| \leq \tfrac{1}{\pi}\, \varepsilon_n, \quad \xi, z \in [-1,1]$$

$$\text{mit } \varepsilon_n = \pi\left\{\tfrac{1}{2}\, \varepsilon_{n_2} + \varepsilon_{n_1}(s + \tfrac{1}{\ln 2}\, s_o)\right\}$$

Hieraus folgt:

$$7.10 \quad \int_{-1}^{1} |K(\xi,z) - K_n(\xi,z)|\,dz \leq \varepsilon_n, \quad \xi \in [-1,1]$$

Um Schranken r und r_n zu finden, wird eine obere Schranke für die homogene Lösung $h(\xi)$ des ungestörten Problems benötigt. Nach 7.07 ergibt sich:

$$(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} |h(\xi)| \leq h, \quad \xi \in [-1,1]$$

mit $h = \frac{1}{\ln 2} h_0 + h_1 + \frac{1}{2} h_2$

$$h_0 = \max_u e^{-A(u)}, \quad h_1 = \max_u |u\, a(u) e^{-A(u)}|$$

$$h_2 = \max_u |(e^{-A(u)})''|, \quad u \in [-1,1]$$

Hiermit erhält man analog 7.09:

$$(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} |d_C(\xi)| \leq r$$

7.11

$$(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} |d_{n_C}(\xi)| \leq r_n, \quad \xi \in [-1,1]$$

mit $r = \frac{1}{2} f_2 + (s + \frac{1}{\ln 2} s_0) f_1 + |C| h$

$$r_n = \frac{1}{2} f_{n_2} + (s + \frac{1}{\ln 2} s_0) f_{n_1} + |C| h$$

Die Voraussetzung 4 des Satzes 1o ist dann erfüllt, wenn die Determinante $D(\lambda)$ des Gleichungssystems 4.03 von Null verschieden ist. Es ist dann wegen 4.02:

$$A_i^+(\xi) = \frac{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi} A_i(\xi), \quad \xi \in [-1,1], \quad i = 1, \ldots, n$$

Die Funktionen $A_i(\xi)$ sind in 4.01 definiert. Um eine Schranke S_n zu erhalten, werden obere Schranken für die $A_i^+(\xi)$ und die Konstanten k_i aus 4.04, $i=1,\ldots,n$, benötigt:

$$|A_i^+(\xi)| \leq a_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

mit

$$a_i = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\, a_{i_2} + \left(s + \frac{1}{\ln 2}\, s_0\right) a_{i_1}\right)$$

$$|k_i| \leq K_i = \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{D_{ji}}{D(\lambda)}\right| b_j r_n, \quad i = 1, \ldots, n,$$

mit

$$b_j = \int_{-1}^{1} |b_j(z)| \, \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Mit Hilfe der beiden letzten Abschätzungen läßt sich eine Schranke S_n angeben:

7.12

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i K_i$$

Der Satz 1o läßt sich nun für unser spezielles Problem formulieren:

Satz 11: Der Zusatzkern $g(x,\xi)$ sei über $-1 \leq x, \xi \leq 1$ nach x stetig differenzierbar und in ξ gleichmäßig hölderstetig. Die Funktion $b_i(\xi)$ des ausgearteten Zusatzkernes $g_n(x,\xi)$, $i=1,\ldots,n$, seien über $-1 \leq \xi \leq 1$ hölderstetig. Die Funktionen $a_i(x)$ von $g_n(x,\xi)$, $a(x)$, $f(x)$ und $f_n(x)$ seien über $-1 \leq x \leq 1$ stetig differenzierbar. Es gelten also notwendig Abschätzungen der Art 7.08. Die Koeffizientendeterminante

$D(\lambda)$ des Gleichungssystems 4.o3 sei von Null verschieden. Dann gilt die Behauptung:

Ist die Bedingung

7.13 $$1 - |\lambda|(1+|\lambda|S_n)\varepsilon_n > o$$

erfüllt, so hat die Integralgleichung 2.o4 für jeden Wert des Parameters C in der Inhomogenität nur eine Lösung $\varphi(\xi)$ aus L_A, für die notwendig eine Abschätzung der Art

7.14 $$|\varphi(\xi)| \leq \frac{M}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \xi \in (-1,1)$$

gilt. $\varphi(\xi)$ ist für jedes C auch Lösung der Ausgangsintegralgleichung o.o5. Für die Differenz $\varphi(\xi)-\varphi_n(\xi)$ gilt folgende Abschätzung:

7.15 $$(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}\,|\varphi(\xi)-\varphi_n(\xi)| \leq \frac{|\lambda|(1+|\lambda|S_n)^2 r\cdot\varepsilon_n}{1-|\lambda|\varepsilon_n(1+|\lambda|S_n)} + (1+|\lambda|S_n)d_n$$

Hierbei ist $\varphi_n(\xi)$ die eindeutige Lösung von 2.o4 mit dem ausgearteten Zusatzkern $g_n(x,\xi)$ und der Inhomogenität $f_n(x)$. Alle in 7.15 auftretenden Konstanten sind in 7.o9 bis 7.12 gegeben.

Beweis: Unter den gemachten Voraussetzungen sind die Funktionen $G(x,z)$ und $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,G_x(x,z)$ über $-1 \leq x,z \leq 1$ zweidimensional hölderstetig. Aus zwei Sätzen in |3|, S.49, ergibt sich dann sofort die zweidimensionale Hölderstetig-

keit des Kerns

$$k^+(\xi,z) = (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}\, k(\xi,z)$$

über $-1 \leq \xi,z \leq 1$, wobei $k(\xi,z)$ im Anschluß an 2.o4 definiert ist. Durch die Substitution

$$Y(\xi) = (1-\xi^2)^{\frac{1}{4}}\, \varphi(\xi)$$

läßt sich die Integralgleichung 2.o4 in eine Fredholmsche Integralgleichung 2. Art mit dem quadratisch integrablen Kern

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\xi^2}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} k(\xi,z)$$

und der quadratisch integrablen Inhomogenität

$$(1-\xi^2)^{\frac{1}{4}} \cdot d_C(\xi)$$

überführen.

Es sei λ_o Eigenwert dieser Integralgleichung. Nach der Fredholmschen Theorie existiert dann eine nicht-triviale quadratisch integrable Lösung $Y_o(\xi)$ des homogenen Problems. Es gilt dann notwendig folgende Abschätzung:

$$\left|(1-\xi_1^2)^{\frac{1}{4}} \cdot Y_o(\xi_1) - (1-\xi_2^2)^{\frac{1}{4}}\, Y_o(\xi_2)\right|^2$$

$$\leq |\lambda_o|^2 \int_{-1}^{1} \frac{|k^+(\xi_1,z)-k^+(\xi_2,z)|^2}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}\, dz \int_{-1}^{1} |Y_o(z)|^2 dz$$

Hieraus folgt wegen der zweidimensionalen Hölderstetigkeit von $k^+(\xi,z)$ die Hölderstetigkeit von $(1-\xi^2)^{\frac{1}{4}} Y_o(\xi)$, und damit die Hölderstetigkeit und Beschränktheit von $(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} \varphi_o(\xi)$ über $-1 \leq \xi \leq 1$. Hierbei ist $\varphi_o(\xi)$ eine nicht-triviale Lösung der homogenen Integralgleichung 2.o4 zum Eigenwert λ_o.

Die Voraussetzungen des Satzes 1o mit $r(\xi) \equiv o$ in 7.o1 sind also erfüllt. Hieraus folgt, daß für einen Eigenwert λ_o eine Bedingung 7.13 nicht erfüllt sein kann; denn sonst müßte nach Satz 1o,1 $\varphi_o(\xi)$ identisch Null sein.

Umgekehrt ergibt sich hieraus, daß bei Gültigkeit der Bedingung 7.13 für einen Wert λ die 2.o4 zugeordnete Fredholmsche Integralgleichung für jedes feste C in der Inhomogenität eine eindeutig bestimmte quadratisch integrable Lösung hat; d.h. andrerseits, daß die Integralgleichung 2.o4 für jedes feste C eine Lösung $\varphi(\xi)$ aus L_A mit $A = \{-1,1\}$ hat, die notwendig auch Lösung der Ausgangsintegralgleichung o.o5 ist. Daß jeder Punkt $\xi \in (-1,1)$ H-Punkt von $\varphi(\xi)$ ist, findet man unter den gegebenen Voraussetzungen unmittelbar aus der Integralgleichung 2.o4. Die Abschätzung 7.14 ergibt sich ebenfalls sofort aus 2.o4. Jetzt läßt sich auf die 2.o4 zugeordnete Integralgleichung 7.o1 der Satz 1o anwenden, der die restlichen Aussagen des Satzes 11 liefert.

Es sei noch angemerkt, daß aus der Zugehörigkeit zur Klasse L_A mit $A = \{-1,1\}$ nicht notwendig folgt, daß für die betreffende Funktion eine Abschätzung der Art 7.14 existiert. Man betrachtet hierzu die Funktion

$$\frac{1}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}, \quad |\xi| < 1$$

die offenbar zu L_A mit $A = \{-1,1\}$ gehört.

Aus Satz 11 ergibt sich unmittelbar der abschließende

Satz 12: Für alle $n \geq N$, $n = 0,1,2, \ldots$, seien die Voraussetzungen des Satzes 11 erfüllt. Ferner gelte:

$$S_n \leq S \quad \text{für } n \geq N$$

$$\varepsilon_{i_1}, d_{i_2} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty, \; i = 1,2$$

Dann hat die Integralgleichung 0.05 eine einparametrige Lösungsschar $\varphi(\xi)$ aus L_A mit $A = \{-1,1\}$, und es gilt

$$(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi_n(\xi) - \varphi(\xi)) \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

gleichmäßig für alle $\xi \in (-1,1)$. Durch $\varphi(\xi)$ sind alle Lösungen aus L_A gegeben.

Beweis: Für genügend großes n ist unter den gemachten Voraussetzungen die Bedingung 7.13 erfüllt. Die Aussagen obigen Satzes ergeben sich dann unmittelbar aus Satz 11 und der Aequivalenz der Ausgangsintegralgleichung 0.05 mit der Integralgleichung 2.04.

Literaturverzeichnis:

|1| M. Eichler: Konstruktion lösender Kerne für singuläre Integralgleichungen 1. Art, insbesondere bei Differenzkern Math. Zeitschrift 48 (1942), S. 503-526

|2| L.W. Kantorowitsch/ W.I. Krylow: Näherungsmethoden der Höheren Analysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956

|3| N.I. Muskhelishvili: Singular Integral equations P. Noordhoff N.V.-Groningen, Holland, 1953

|4| W. Schmeidler: Integralgleichungen mit Anwendung in Physik und Technik Akad. Verlagsgesellschaft Geest und Portig KG, Leipzig, 1955

|5| H. Schubert: Ueber eine lineare Integrodifferentialgleichung mit Zusatzkern Akademie-Verlag, Berlin, 1950

|6| H. Söhngen: Die Lösung der Integralgleichung

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(\xi)}{x-\xi} \, d\xi$$

und deren Anwendung in der Tragflügeltheorie, Math. Zeitschrift 45 (1939), S. 245-264

Lebenslauf

Am 4. April 1937 wurde ich als Sohn des Eisenbahners Heinrich Müller und seiner Ehefrau Katherina, geb. Jost, in Furschweiler, Kreis St. Wendel, geboren. Nach dem Besuch der dortigen katholischen Volksschule vom 1. September 1943 bis zum 13. Juni 1948 war ich Schüler des Staatlichen humanistischen Gymnasiums Wendalinum zu St. Wendel, wo ich am 22. März 1957 die Reifeprüfung ablegte.

Seit SS 1957 bis einschließlich SS 1962 studierte ich an der Universität des Saarlandes Mathematik und Physik. Im Oktober 1962 legte ich dort mit einer von Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Dörr angeregten Diplomarbeit über Fehlerschranken für die Eigenwerte hermitescher Integralgleichungen das Diplomexamen in Mathematik ab.

Seit dem 1. November 1962 bin ich Assistent am Lehrstuhl für Angewandte Mathematik bei Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Dörr, unter dessen Leitung ich im Herbst 1964 meine Promotion abschließen konnte.